

4^o Div. 3854(3).

Zu der

öffentlichen Prüfung

der sechs Klassen der Gelehrten-Schule

am 20. und 21. April, früh 9 Uhr,

und zu den

feierlichen Redeübungen

am 22. April, um 10 Uhr,

ladet ehrerbietigst und ergebenst ein

Dr. Friedrich Karl Kraft,

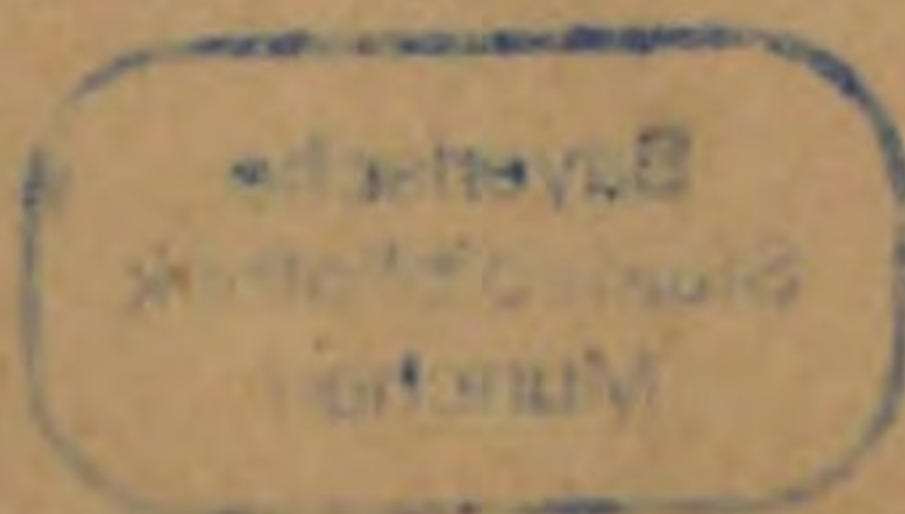
Director der Gelehrten-Schule des Johanneums.

Inhalt:

1. Ueber die Ableitung des Taylorschen Theorems aus den Principien des Infinitesimal-Calculs, von *G. H. Bubendey*, Professor.
2. Schulnachrichten, von dem Director *Dr. Kraft*.

H a m b u r g, 1 8 4 1.

Gedruckt bei Johann August Meissner, Eines Hochedlen und Hochweisen Raths, wie auch des
Gymnasiums und Johanneums Buchdrucker.



Öffentliches Examen

der sechs Klassen der Gelehrten-Schule

am 20. und 21. April 1871

Mathematische Vorübungen

am 22. April 1871

Die ersten sechs Klassen

am 23. April 1871

1. Über die Ableitung der Taylor'schen Theorie aus dem
Prinzip der infinitesimalen Größe von L. A. C. Young

2. Schulbuch für den ersten Theil der Arithmetik



Ueber die

Ableitung

des

Taylor'schen Theorems

aus den

Principien des Infinitesimal - Calculs,

von

G. H. Bubendey,

Professor am Johanneum.

H a m b u r g , 1 8 4 1 .

Gedruckt bei Johann August Meissner, Eines Hochedlen und Hochweisen Raths, wie auch des
Gymnasiums und Johanneums Buchdrucker.

Abbildung

Thylophora

Principien des Infinitesimal-Calculus

Abbildung

I.

Seitdem Lagrange in der durch das Taylorsche Theorem gegebenen Entwicklung des Incrementes einer Function nach den Potenzen des Incrementes der unabhängigen veränderlichen Grösse die wesentliche Grundlage des Infinitesimal-Calculs fand*), und in der Théorie des fonctions die von dieser Grundlage ausgehende vollständige Darstellung

*) Zuerst findet sich diese Ansicht, nur kurz und beiläufig ausgesprochen, in der Abhandlung von Lagrange „Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables“ Mém. de l'Acad. de Berlin 1772, wo es pg. 187 heisst: „Si u est une fonction quelconque finie d'une variable x , qu'on y mette $x + \xi$ à la place de x et que par la théorie des séries on dégage la nouvelle variable ξ de la fonction, on sait que u deviendra de cette forme $\dots u + p \xi + p' \xi^2 + p'' \xi^3 + \dots$ “ und pg. 188: „Le calcul différentiel considérée dans toute sa généralité consiste à trouver $\dots$ les fonctions $p, p', p'' \dots$, dérivées de la fonction u , et le calcul intégral consiste à retrouver la fonction u par le moyen de ces dernières fonctions. Cette notion des calculs différentiel et intégral me parait la plus simple et la plus claire, qu'on ait encore donnée; elle est, comme l'on voit, indépendante de toute métaphysique et de toute théorie des quantités infiniment petites ou evanouissantes.“ Die Bestimmung der Coefficienten p, p', p'' , oder vielmehr die Darlegung des Gesetzes ihrer Abhängigkeit von einander, geschieht in ähnlicher Weise, wie später in der Théorie des fonctions (1797) oder den Leçons sur le calcul des fonctions, nur dass hier noch nicht der Versuch gemacht wird, die nur auf Induction beruhende Annahme der Entwicklung $\dots u + p \xi + p' \xi^2 \dots$ als allgemein gültig für jede Function „a priori“ zu deduciren. Es hatte aber schon vor Lagrange

desselben oder des von ihm substituirten Derivations-Calculs gab, ist jener Lehrsatz meistens an die Spitze der Theorie dieses Calculs gesetzt worden, auch von denen, die es vorzogen, nicht allein auf die ältere Bezeichnung, sondern mehr oder minder auch, und wie wir glauben mit Recht, auf die älteren ihr zu Grunde gelegten Begriffe zurückzugehen. Denn wie hoch man auch den Werth des ausgezeichneten so eben von uns erwähnten Werkes anschlagen mag, und namentlich gerade in Betreff der Aufklärung über die Fundamental-Operationen des genannten Calculs, so wird sich doch nicht in Abrede stellen lassen, dass die an den rein formellen Begriff der derivirten Functionen angeknüpften Betrachtungen nur zu häufig gerade den Character des Indirecten an sich tragen, dessen Vermeidung Leibnitz selbst als das Hauptverdienst

Euler in seiner Differential-Rechnung diese als eng verbunden mit der überall hervortretenden Form der Entwicklung $\dots \Delta y$ oder $f(x + \omega) - f x = p \omega + q \omega^2 + \dots$ dargestellt (Institut. calc. diff. c. IV), so dass das Eigenthümliche der obigen Bemerkungen von Lagrange zu beschränken ist auf die rein formelle Definition des Infinitesimal-Calculs und die sich an sie anschliessende „rein algebraische“ Bestimmung (d. h. mit Vermeidung der Begriffe des unendlich Kleinen und der letzten Verhältnisse oder der Grenzen) der Grössen $\dots p, 2. p', 2. 3. p'' \dots$ als successiv von einander derivirter Functionen. Wenn die später von Lagrange gegebene Ausführung dieser Grundgedanken mit der Entwicklung $f(x + \omega) = f x + p \omega + \dots$ noch den Satz verbindet, dass ω stets so klein bestimmt werden könne, dass der Werth eines Gliedes dieser Reihe die Summe aller folgenden übersteige und durch ihn die Lehre von den derivirten Functionen gerade für die Probleme, die den Infinitesimal-Calcul eigentlich hervorgetrieben haben, lediglich ihre Bedeutung gewinnt, so wird es klar, dass vielmehr dieser Satz erst den eigenthümlichen Gehalt jener Entwicklung ausspricht und dass der aus ihm (wenn man sich nicht bloss an die Worte halten will) deutlich hervorscheinende Begriff des Unendlich-Kleinen in jener formellen Begriffsbestimmung nur umgangen ist und nur so lange umgangen werden konnte, als man von der wesentlichen Eigenthümlichkeit des Calculs oder der Methode, der sie als Grundlage dienen sollte, abstrahirte.

seines Algorithmus und als den wesentlichen Vorzug seiner Methode vor der Exhaustions-Methode der Alten, oder ihrer Behandlung derselben, stets hervorhebt. *) — Wenn, wie in Zweifel nicht gezogen werden kann,

*) So sehr Leibnitz in den immer nur gelegentlichen Aeusserungen zur Rechtfertigung seiner Methode des Unendlich-Kleinen stets darauf zurückkommt, dass die durch sie gewonnenen Resultate sich immer nach der Exhaustions-Methode der Alten durch eine Deduction ad absurdum erweisen lassen und die stets vorhandene Möglichkeit eines solchen Beweises aus der Art wie der Begriff des Unendlich-Kleinen angewendet werde, in die Augen springen müsse: so sehr vermeidet er doch stets geflissentlich eine in's Einzelne gehende Darlegung dieser Art oder eine Uebertragung seiner Sprache in die des Archimedes, gerade weil er alles Gewicht auf seine Ausdrucks- oder Auffassungsweise legte, durch welche die Exhaustions-Methode aus einer Methode des Beweisens in eine Methode des Erfindens übersetzt worden sei, und, im Vorgefühl der grossen Fruchtbarkeit seiner Betrachtungsweise, fürchtete, dass gerade dieser Geist derselben unter den Versuchen einer der Form nach mehr genügenden Rechtfertigung derselben verloren gehen möchte. So z. B. in seiner Entgegnung auf die Einwürfe Nieuwentyt's: *Ego quidem fateor magni me eorum diligentiam facere, qui accurate omnia ad prima principia usque demonstrare contendunt et in talibus quoque studium non raro posuisse; non tamen suadere ut nimia scrupulositate arti inveniendi obex ponatur Archimedeo quidem processu res semper deductione ad absurdum confirmari potest. Quoniam tamen methodus directa brevior est ad intelligendum et utilior ad inveniendum etc. Opp. ed. Dutens T.III. pg.328.* „Le calcul infinitésimal a cela de commode, qu'il donne directement, et visiblement, et d'une manière propre à marquer la source de l'invention, ce que les anciens comme Archimède donnoient par circuit dans leurs réductions ad absurdum“ (l. c. pg. 371) . . . de sorte, qu'on ne diffère du stîle d'Archimède que dans les expressions, qui sont plus directes dans notre méthode et plus conformes à l'art d'inventer., (l. c. pg. 370). In dem Leibnitzischen nicht bloss mathematischen Principe „in continuis extremum exclusivum tractari potest ut inclusivum“ (l. c. 408), wovon z. B. das Bekanntere „quicquid de polygono demonstrari potest, sive ita ut nullus habeatur ad numerum laterum respectus, sive ita, ut tanto magis verificetur, quanto major sumitur laterum numerus, ita, ut error tandem fiat dato quovis minor, id de curva potest pronuntiari“ (l. c. pg. 173) nur ein specieller Fall ist, ist das Extremum exclusivum offenbar zusammenfallend mit dem später

der Continuitäts-Begriff oder vielmehr die Behandlung einer continuirlichen Grössen-Veränderung durch discrete Grössen der Boden ist, in dem die dem Differential- oder Fluenten-Calcul eigenthümlichen Betrachtungen wurzeln, so scheint es, dass dieser Begriff oder die von ihm abhängigen, der Exhaustion, der Grenzen, in der Ableitung selbst der Taylorschen Reihe, wenn sich in ihr wirklich die wesentlichen Principien des Calculs aussprechen, so dass sie mit Recht an die Spitze seiner Entwicklung gestellt werden kann, nothwendig hervortreten müsse.

als Grundlage des Infinitesimal-Calculs mehr ausgebildeten Begriff der Grenze. Der einfache Gedanke aber, den Leibnitz überall als kurzgefasste Rechtfertigung seiner Methode vorschiebt, ist, dass der durch Weglassung der „infinite“, oder, wie er später lieber sagte, „incomparabiliter parva“ aus der Rechnung begangene Fehler, wenn einer dadurch begangen würde, „dato quovis errore minor“ sein müsste, und „error, quovis dato minor, non est error“. Es fehlte nur Leibnitz, da zu seiner Zeit der Begriff der Function noch nicht ausgebildet war, für diese an sich sehr richtigen Reflexionen, die in ihrer unbestimmten allgemeinen Haltung aber nicht befriedigen können, ein Substrat, an welchem der eigentliche Gehalt derselben, ohne an Allgemeinheit zu verlieren, anschaulicher geworden wäre. Man würde dann ohne Zweifel den sich von selbst aus dem Obigen darbietenden Schluss nicht umgangen haben, dass in den Bestimmungen, um die es sich bei Weglassung der „incomparabiliter parva“ handelt, diese nicht sowohl weggelassen werden können, als vielmehr weggelassen werden müssen; man blieb aber stehen bei dem „können“. So sucht der seiner Zeit berühmte Commentator der Leibnitzischen Ideen, Chr. Wolf, in dem ersten Scholion seiner Differential-Rechnung das Verfahren derselben durch die Bemerkung zu rechtfertigen, dass man die Bestimmung einer Bergeshöhe nicht deshalb als ungenau ansehen werde, weil etwa nach Messung des Höhenwinkels der Wind ein Sandkorn vom Gipfel könne weggeführt haben; welche Bemerkung, obwohl sie mit den einleitenden Worten beginnt: „ut natura infinitesimalium recte intelligatur cett.“ und so richtig sie an sich ist, in der ihr hier gegebenen Bedeutung nur eine Verunreinigung der Leibnitzischen Ansicht enthält, und an einigen Aeusserungen von Leibnitz, dem es vor Allem darum zu thun war, seiner Methode Eingang zu verschaffen, nur einen scheinbaren Anhaltspunct findet. S. Lettre à Varignon, Opp. III, 370.

Nichts desto weniger vermisst man dieses nicht nur an der Darstellung von Lagrange, wenigstens soweit sie die Ableitung der Reihe betrifft, sondern auch den meisten uns bekannten Darstellungen derer, die dem Satze eine ähnliche Stellung, wie die von Lagrange ihm eingeräumte, gegeben haben. Wenn nun hierin zugleich der Grund liegt, weshalb, wie uns scheint, diese aus rein analytischem Gesichtspuncte unternommenen Entwicklungen des Theorems, wenn in der Untersuchung wirklich nur der ganz abstracte Begriff der Function festgehalten werden soll, nicht völlig genügen können, so halten wir es dagegen für eben so einfach, wie leicht, eine an den Grundbegriff des Infinitesimal-Calculs, die continuirliche Aenderung der Functionen, sich anknüpfende Begründung des Theorems zu geben, oder dasselbe aus der Betrachtung einer solchen Veränderung von selbst hervorgehen zu lassen.

II.

Wenden wir uns zunächst zu einigen Reflexionen über das von Lagrange eingeschlagene Verfahren zur Entwicklung der Taylorschen Reihe, da es die Grundlage aller spätern sogenannten rein algebraischen Ableitungen derselben geworden ist. Bekanntlich hat Lagrange zuerst gezeigt, dass, wenn in der Entwicklung

$$f(x + \omega) = f x + p \omega + q \omega^2 + r \omega^3 + \dots$$

$p, q, r, \dots$ als nur von x abhängige Functionen und die Reihe als nur nach Potenzen mit positiven und ungebrochenen Exponenten von ω fortschreitend vorausgesetzt wird, der durch das Taylorsche Theorem ausgesprochene Zusammenhang der Coefficienten $p, q, r, \dots$ eine einfache Folge der vorausgesetzten Form dieser Entwicklung selbst ist; dass, wenn sie als möglich für jede Function angenommen und $f(x + \omega + \alpha)$ aus dem doppelten Gesichtspunct entwickelt wird, nach welchem α das eine Mal als Increment von x , das andre Mal als

Increment von ω betrachtet wird, mittelst der Methode der unbestimmten Coefficienten und unter Voraussetzung des binomischen Lehrsatzes für ganze positive Exponenten, sich ergibt: dass, in demselben Sinne wie p die derivirte Function von $f x$ genannt werden kann, $2 q$ die derivirte von p , $2.3. r$ die derivirte von q , u. s. w., ist. Wenn nun bei dieser Betrachtungsweise alles darauf ankommen wird, darzuthun, dass die Veränderung, welche eine Function durch die Veränderung der unabhängigen Veränderlichen erleidet, stets einer Entwicklung von der angegebenen Form fähig sein müsse, da sie sich als das Fundament des ganzen Functionen-Calculs erweist, so sehen wir auch Lagrange das grösste Gewicht darauf legen, zuerst a priori, wie er es selbst nennt, ihre allgemeine Gültigkeit deducirt zu haben. Nichts desto weniger aber beschränkt er sich in seiner Demonstration darauf, zu zeigen, dass die obige Reihe weder Potenzen mit negativen noch mit gebrochenen Exponenten von ω enthalten könne, ausser für particuläre Werthe von x , die, wie uns scheint, sich darbietende Frage über die allgemeine Möglichkeit dieser Entwicklungsform überhaupt unberührt lassend. So sehr diese Beweisführung zur Zeit ihres Erscheinens namentlich dadurch überraschen musste, dass gerade der Fall, in dem die Taylorsche Reihe ungültig zu werden schien, und den Lagrange zuerst auf seine wahre Bedeutung zurückführte, sich aus ihr sogleich von vorn herein zu erkennen gab*), so unbefriedigend ist es doch den Punct, dass das Increment der Function einer nach den Potenzen des Incrementes von x

*) Noch Gräson in den Anmerkungen zu Eulers Differential-Rechnung (1798) ist in der Verlegenheit, über den bekannten scheinbaren Ausnahms-Fall — Euler gedenkt seiner gar nicht — nichts anders vorbringen zu können, als die ganz vage „Warnung für jeden vorsichtigen Geometer, bei Anwendung dieses Lehrsatzes sich desselben mit aller möglichen Behutsamkeit und Scharfsinnigkeit zu bedienen, indem sich oft die berühmtesten Mathematiker dadurch haben irre führen lassen.“

fortschreitenden Entwicklung überhaupt fähig sey, als ein durch die bekannten Reihen-Entwicklungen wenn auch noch so sehr motivirtes Postulat annehmen zu müssen, und zwar um so mehr, als von ihm die Anwendung der Functionen-Theorie gerade auf die eigentlichen Probleme des Infinitesimal-Calculs, nach der Darstellung von Lagrange selbst, ganz und gar abhängig erscheint. Auch trägt derselbe den von ihm aus dem stätigen Verlaufe der Curven abgeleiteten Satz, dass in der den Werth von $f(x + \omega) - f x$ ausdrückenden Reihe $\dots p \omega + q \omega^2 + \dots$ ω immer so klein bestimmt werden könne, dass ein Glied derselben grösser als die Summe aller folgenden werde (Th. d. f. 14), — mit der Bemerkung vor: „Man soll diesen Lehrsatz als einen der Fundamentalsätze der hier vorzutragenden Theorie ansehen; er wird stillschweigend in der Differential- und Fluxionen-Rechnung vorausgesetzt; und hier ist es, wo man mit Recht sagen kann, dass diese Calculs die meisten Blößen geben, vorzüglich in ihrer Anwendung auf geometrische und mechanische Probleme.“ — In der That lässt sich voraus vermuthen, dass wegen des engen Zusammenhanges der mehrerwähnten Entwicklungsform mit den wesentlichen Problemen des Infinitesimal-Calculs eine Deduction a priori ihrer allgemeinen Gültigkeit sich nicht werde geben lassen, ohne auf die eine oder andre Weise auf eine der eigenthümlichen Betrachtungsweisen dieses Calculs zurückzukommen. Es sollten aber bei der Begründung der Functionen-Theorie durchaus nur „rein algebraische“ Principien in Anwendung kommen, so wenig doch Lagrange später bei der zuerst von ihm gegebenen Begrenzung des Restes der Taylorschen Reihe, durch welche die Darstellung derselben erst vollständig wird, sich der Begriffe der Exhaustion oder der Grenzen erwehren kann.*)

*) S. Théorie d. fonct. No. 48 und Leçons etc., IX, pg. 91.

analytische Form der obigen, von Lagrange als Grundlage der Taylorschen vorausgesetzten Reihe beschränken, so muss, wie uns scheint, der wesentliche Character dieser oder der Taylorschen Reihe, der zugleich den rechten Gesichtspunct für ihre Deduction anweisen wird, dahin ausgesprochen werden: Sie gibt den allgemeinen Ausdruck der durch die Veränderung der unabhängigen herbeigeführten Veränderung der abhängigen Grösse, so entwickelt, dass der Unterschied zwischen der ganzen Veränderung oder ihrer Ergänzung und den successiv abgesonderten Gliedern, in Verhältniss zu diesen letztern, bei stätiger Abnahme des Incrementes der Unabhängigen, kleiner als jede gegebene oder zu gebende Grösse gedacht werden kann, die abgesonderten Glieder aber keiner weitem Zerlegung dieser Art fähig sind. Eben sowohl nämlich, wie man entwickeln kann

$$f(x + \omega) = f x + p \omega + q \omega^2 + r \omega^3 + \dots$$

kann man auch entwickeln, und wir werden später darauf zurückkommen, z. B.

$$f(x + \omega) = f x + p \sin \omega + q \sin^2 \omega + r \sin^3 \omega + \dots$$

überhaupt nach den Potenzen jeder beliebigen Function von ω , die mit ω zugleich verschwindet, was formel angesehen, als eine Erweiterung des Taylorschen Satzes betrachtet werden kann, worin aber der eben berührte Gedanke, der sich in der Taylorschen Reihe ausspricht, vielmehr verloren gegangen ist. Es kann freilich auch hier die Summe aller folgenden Glieder im Verhältniss zu einem vorhergehenden beliebig klein gedacht werden, dies letztere aber, z. B. $p \sin \omega = p \omega - p \frac{\omega^3}{2 \cdot 3} + \dots$, kann selbst wieder in einer Reihe entwickelt werden, deren Glieder, indem ω bis zu seiner Grenze $= 0$ abnimmt, gegen einander und gegen $\sin \omega$ beliebig klein werden. Insofern es möglich ist, jede Function von ω nach den Potenzen dieser Grösse zu entwickeln, wird man durch

Entwicklungen der eben erwähnten Art immer wieder auf die vorher besprochene zurückgeführt; um den allgemeinen Beweiss dieser Möglichkeit handelt es sich aber gerade. *)

Betrachten wir jetzt den von Lagrange geltend gemachten Grund für die Behauptung, dass in der Entwicklung

$$f(x + \omega) = f x + p \omega^\alpha + q \omega^\beta + r \omega^\gamma + \dots$$

— die Form der Reihe, in welcher $p, q, r \dots$ nur von x abhängige Functionen bedeuten, soweit zugebend, — keine Potenzen von ω mit gebrochenen Exponenten vorkommen können, ausser für particuläre Werthe von x , auf welcher Behauptung die Bestimmung der Coefficienten dieser Potenzen, als von einander derivirter Functionen, beruht. Wir müssen gestehen, dass in der Abstraction, in welcher diese Behauptung von Lagrange behandelt wird und auch behandelt werden musste, das vorgebrachte Argument uns nicht entscheidend scheint.

*) Bekanntlich hat Lagrange, wie vor ihm Euler, sich geirrt, als er die Entwicklung $(2 \cos x)^m = \cos m x + m \cos (m-2) x + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} \cos (m-4) x + \dots$ gültig für jeden Werth von x und m hielt (sie erweist sich sogleich als falsch, in diesem Umfange, wenn man z. B. $x = \pi$, $m = \frac{1}{2}$, $= \frac{1}{3} \dots$ setzt, da im erstern Falle $\sqrt{-2} = 0$, im andern $\sqrt[3]{-2} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{2}$, folgen würde); an der von ihm gegebenen Deduction derselben (Leçons etc., XI, pg. 147) muss vor allem ausgesetzt werden, dass sie die Möglichkeit der Entwicklung $\dots \cos^m x = a \cos n x + b \cos (n-1) x + \dots$ ohne Weiteres zu Grunde legt. So nützlich, und nothwendig selbst, zur Erfindung solche vorläufige Voraussetzungen sind, so darf doch, wie sich auch an diesem Beispiel zeigt, die aus der als möglich vorausgesetzten Entwicklungsform einer Reihe abgeleitete Bestimmung ihrer Coefficienten, dadurch, dass sie gelingt, noch nicht als Rechtfertigung der Voraussetzung selbst angesehen werden; ist diese nicht gegeben, so bleibt immer noch der Beweis übrig, dass die gefundene Reihe allgemein oder in einem gewissen Umfange die Werthe der Function, die sie darstellen soll, wirklich ausdrückt, oder den analytischen Gleichungen, die als deren Definition gelten können, genügt.

Es wird nämlich gesagt*), das Glied $\omega^{\frac{m}{n}}$ könne in der Reihe nur vorkommen, wenn, was nur für einen besondern Werth von x stattfinden kann, in $f x$ ein Wurzel-Ausdruck verschwinde, weil sonst wegen der verschiedenen Combination der n , nach algebraischen Principien vorhandenen, Werthe des Gliedes $\omega^{\frac{m}{n}}$ mit dem Werthe oder den Werthen von $f x$, die entwickelte $f(x + \omega)$ mehr Werthe haben würde als die unentwickelte; was ungereimt sei. Damit aber diese Argumentation völlig beweisend sei, müsste unsrer Ansicht nach vorher gezeigt werden, dass, auch bei der Annahme des vorkommenden Gliedes $\omega^{\frac{m}{n}}$, nichts desto weniger die Bestimmung seines Coefficienten von den algebraischen Werthen der Potenz $\omega^{\frac{m}{n}}$ unabhängig sein müsse oder derselbe unabhängig von ihnen müsse gefunden werden können; denn da die Functionen nicht, wie natürliche Objecte, an ihnen selbst eine Entwicklung haben, sondern entwickelt werden, so könnte es sehr wohl möglich sein, dass der Coefficient der Potenz $\omega^{\frac{m}{n}}$, wenn sie als vorhanden angenommen werden müsste, sich nicht anders bestimmen liesse als mit Rücksicht auf den dieser Potenz beigelegten Werth, wodurch die Vieldeutigkeit des Gliedes wieder aufgehoben werden könnte. So lässt sich nach dem formel erweiterten Princip der Taylorschen Reihe entwickeln

$$f(x + \omega) = f x + 2 \frac{\partial f x}{\partial x} \left(\sqrt{1 + \omega} - 1 \right) + \left(2 \frac{\partial^2 f x}{\partial x^2} + \frac{\partial f x}{\partial x} \right) \left(\sqrt{1 + \omega} - 1 \right)^2 + \dots$$

bei der Methode aber, nach welcher diese Entwicklung gefunden ist und nach den Potenzen von $\left(\sqrt{1 + \omega} - 1 \right)$ fortgeführt werden kann, darf von dem zwiefachen algebraischen Werthe des Ausdrucks $\sqrt{1 + \omega}$ nicht abstrahirt werden; sie bezieht sich auf den positiven Werth, und

*) Théorie d. f. No. 10. Leçons etc. pg. 9.

wollte man statt seiner den negativen zu Grunde legen, so würde man erhalten:*)

$$f(x + \omega) = fx - 2 \frac{\partial fx}{\partial x} \left(\sqrt{1 + \omega} + 1 \right) + \left(2 \frac{\partial^2 fx}{\partial x^2} + \frac{\partial fx}{\partial x} \right) \left(\sqrt{1 + \omega} + 1 \right)^2 - \dots$$

Eben so wird man die Unmöglichkeit der sich auf demselben Wege ergebenden Entwicklung

$$f(x + \omega) = fx + \frac{\partial fx}{\partial x} \cdot \arcsin \omega + \frac{\partial^2 fx}{\partial x^2} \frac{(\arcsin \omega)^2}{1 \cdot 2} + \left(\frac{\partial^3 fx}{\partial x^3} - \frac{\partial fx}{\partial x} \right) \frac{(\arcsin \omega)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

nicht daraus deduciren wollen, dass $\arcsin \omega$ für einen bestimmten Werth der ω unendlich viel Werthe habe, wenn die Reihe gerade unter der Annahme, dass der kleinste dieser Werthe für $\arcsin \omega$ gesetzt werde, gefunden ist.

Es führt uns aber das Vorhergehende von selbst zu einem noch weiter reichenden Gesichtspunct, aus dem die rein analytische Behandlung der Principien des Functionen-Calculs angesehen werden muss.

Offenbar können Schlüsse über die Glieder einer unendlichen Reihe aus den Werthen der Function, welche durch sie dargestellt werden soll, Gültigkeit nur haben unter Voraussetzung der Convergenz der Reihe. Es würde auch das auf eine unendliche Reihe angewendete Wort „Entwicklung“ eine ganz inhaltslose Vorstellung repräsentiren, wenn das gesetzmässige Fortschreiten derselben nicht in einer Beziehung auf die Werthe der Function stände, die ganz unabhängig von einem noch hinzuzufügenden Rest ist, dessen allgemeiner Ausdruck ausserhalb des Gesetzes der Reihe liegt; denn aus dem Gesichtspunct der durch Hinzufügung eines Restes herbeizuführenden völligen Identität könnte jede beliebig formirte Reihe als Entwicklung jeder beliebigen Function gelten. Daraus z. B., dass der Ausdruck $\frac{1}{1-x}$ für $x > 1$ negative Werthe be-

*) Wir werden auf die Methode dieser Entwicklungen später zurückkommen.

kommt, wird das Vorhandensein negativer Coefficienten in einer nach Potenzen von x fortschreitenden Darstellung desselben nur gefolgert werden können, wenn dieselbe für jene Werthe ($x > 1$) eine convergirende Reihe bildet, wie es der Fall ist mit der Entwicklung $\frac{1}{1-x} = -x^{-1} - x^{-2} - \dots$; die Folgerung wird aber ungültig für die Form $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 \dots$, da hier die Reihe nur innerhalb der Grenzen $x = -1$ und $x = +1$ convergirend ist und nur innerhalb dieser Grenzen als eine Darstellung des Ausdrucks $\frac{1}{1-x}$ gelten kann, wie die vorhergehende Reihe nur ausserhalb dieser Grenzen. Nun lässt sich aber ohne Kenntniss der Coefficienten der Entwicklung $f(x + \omega) - fx = p\omega + q\omega^2 + \dots$ kein Urtheil über ihre Convergenz oder Divergenz fällen, als in so fern man von dem Gedanken ausgeht, der schon oben als der wesentliche bezeichnet wurde, dass für ω im Allgemeinen immer eine Bestimmung möglich ist, durch welche der Rest des Incrementes $f(x + \omega) - fx$ im Verhältniss zu dem letzten der entwickelten Glieder kleiner als jede gegebene Grösse (unendlich klein) werden kann*), woraus folgt, dass die Reihe bis zu einem gewissen Werthe von ω nothwendig convergirend sein müsse, und gerade nur in sofern hat es überhaupt einen Sinn, sie als allgemeine Entwicklungsform der Functionen zu betrachten. — Aber auch abgesehen davon, dass überhaupt erst durch den so eben hervor-

*) Der ähnliche oben angeführte Satz der *théorie des fonctions*, dass nämlich jedes Glied der Reihe grösser gedacht werden könne, als die Summe aller folgenden, sagt viel weniger, obwohl die im Allgemeinen immer mögliche Convergenz der Reihe auch durch ihn festgestellt sein würde. Indess so grosses Gewicht die *théorie d. f.* auf ihn legt, so betrachtet sie ihn doch eigentlich nur als einen Hülfsatz für die Anwendungen auf die Geometrie und Mechanik, und räumt ihm einen Einfluss auf die Darstellung der analytischen Principien so wenig ein, dass er in den ersten Capiteln der nur analytischen *lecons etc.* ganz fehlt, und auch später (Lec. IX, pg. 106) nur beiläufig erwähnt wird.

gehobenen Gedanken Schlüsse aus den Werthen der Function fx über die Entwicklung $f(x + \omega) = fx + p\omega + \dots$ möglich werden, liegt derselbe der Schlussweise von Lagrange noch auf eine bestimmtere Weise zu Grunde. In der That würde man gegen die Folgerung, dass durch das Vorkommen eines Gliedes von der Form $u\omega^{\frac{m}{n}}$ die entwickelte $f(x + \omega)$ mehr Werthe bekommen würde, als die unentwickelte, den Einwand machen können, dass durch das Vorkommen mehrerer Glieder dieser Form $\dots z\omega^{\frac{m+a}{n}}$ etc. $\dots$, oder durch den noch fehlenden Rest, die Mehrdeutigkeit dieser Glieder im Resultate destruiert werden könne; welcher Einwand erst dadurch hinfällig wird, dass die Ergänzung der Reihe gegen das letzte Glied immer unendlich klein gedacht werden kann, woraus zu folgern ist, dass die durch das Glied $u\omega^{\frac{m}{n}}$ einmal festgestellte Beschaffenheit der Reihe durch keine folgenden Glieder wieder vernichtet werden kann.

Noch deutlicher aber stellt sich die Nothwendigkeit dieser Grundlage hervor an dem Folgenden. Wenn Lagrange behauptet, dass in der Darstellung der Function $f(x + \omega)$ durch die Reihe $\dots fx + p\omega^\alpha + q\omega^{\alpha+\beta} + \dots$ ω deshalb im Allgemeinen mit einem negativen Exponenten nicht vorkommen könne, weil sonst, durch die Bestimmung $\omega = 0$, fx unendlich werde, was nur für particuläre Werthe von x stattfinden könne*), so muss dieser für die Behauptung gegebene Grund, so wie er gegeben wird, wieder als ungenügend bezeichnet werden, da ja mehrere Glieder der

*) Leçons etc. pg. 10. Si parmi les termes de ce développement ($f(x+i) = \dots$) il y en avait un de la forme $\frac{r}{i^m}$, m étant un nombre entier positif, en faisant $i = 0$, ce terme deviendrait infini; donc la fonction $f(x+i)$ devrait devenir infini, lorsque $i = 0$; par conséquent il faudrait que fx devînt infinie, ce qui ne peut avoir lieu, que pour des valeurs particulières de x . Nous sommes donc assurés etc.

Reihe $= \infty$ werden können und die Differential-Rechnung gerade die Mittel giebt, den in vielen Fällen endlichen Werth der Differenz $\infty - \infty$ zu bestimmen.*) Der angeführte Grund wird beweisend erst dadurch, dass für die steigende Potenzen-Reihe von ω , möge sie nun mit einem positiven oder negativen Exponenten beginnen, der allgemeine Satz feststeht, dass bei continuirlicher Abnahme der ω die Summe der folgenden Glieder im Verhältniss zu dem vorhergehenden unendlich klein gedacht werden kann, so dass, wenn in der obigen Reihe α negativ ist, das Glied $p \omega^\alpha$ allein das Unendlichwerden von $f x$ entscheidet, sobald $\omega = 0$ gesetzt wird. Wenn wir also durch diese Betrachtungen wieder auf das Unendlich-Grosse verschiedener Ordnungen der ältern Theorie zurückkommen, so wird es, wie uns scheint, klar, wie die Grundlage, die Lagrange seiner Theorie der derivirten Functionen geben wollte, überall von selbst auf Leibnitzens „incomparabiliter parva“, die durch diese Theorie gänzlich eliminirt werden sollten, zurückführt.

In der That, die Theorie von Lagrange hat, wenn man durch die formelle Umkleidung auf das Wesen der Sache dringt, genau dieselbe Grundlage, die Leibnitzens Infinitesimal-Methode hat. Zu diesem Ausspruch drängt uns nochmals schliesslich die Betrachtung der Methode, mittelst deren Lagrange aus der bisher behandelten Entwicklungsform $\dots f(x + \omega) = f x + p \omega + q \omega^2 + \dots$ die Coefficienten p, q etc. übereinstimmend mit der Taylorschen Reihe feststellt. Die wesentliche so eben berührte Eigenthümlichkeit der Potenzen-Reihe, nach welcher bei continuirlicher Abnahme der potenzirten Grösse das eine Glied im

*) Wie sich z. B. der Werth der Differenz $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\lg x}$, für $x = 1$, wenn man sie auf die Form $\frac{\lg x - (x-1)}{(x-1) \lg x}$ bringt, nach zweimaliger Differentiation des Zählers und Nenners $= -\frac{1}{2}$ ergibt.

Verhältniss zu dem folgenden kleiner als jede gegebene oder zu gebende Grösse, oder kurz, beide gegen einander, das eine unendlich gross, das andre unendlich klein gedacht werden kann, bildet, so wie theilweise die Grundlage des Infinitesimal-Calculs, so auch zugleich die Basis der Methode, die Lagrange, nicht allein bei Ableitung der Taylorschen Coefficienten, sondern überall bei Rechtfertigung der Grundoperationen des Derivations-Calculs in Anwendung setzen muss. Wir meinen die sogenannte Methode der unbestimmten Coefficienten. Wenn diese aus den beiden Entwicklungen,

$$a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots$$

worin $a_1 \dots$ und $\alpha_1 \dots$ von x unabhängige Grössen, die Gleichheit von a_1 und α_1 , a_2 und α_2 u. s. w. folgert, so ruht, die Sache gründlich angesehen, diese Folgerung auch hier auf dem Satze*), dass die veränderliche Summe der Glieder $\dots a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots$ im Verhältnisse

*) Diese Begründung der Methode erinnern wir uns zuerst gefunden zu haben in der kleinen Schrift von Carnot: *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*. Gewöhnlicher Weise begnügt man sich damit, die Nothwendigkeit der Gleichheit der Coefficienten dadurch zu begründen, dass man auf beiden Seiten durch x dividirt, $x = 0$ setzt, die sich sodann als gleichergebenden a_1 und α_1 auf beiden Seiten wegfallen lässt u. s. w. Es wird aber diese Ansicht der Sache schon ungenügend, wenn in den nach steigenden Potenzen von x fortschreitenden Reihen $a_1 x^m + \dots = \alpha_1 x^n + \dots$ m und n auch negativ sein können, in welchem Falle nichts desto weniger durch die oben gegebene Schlussweise leicht gefolgert wird, sowohl, dass $m = n$, als auch dass $a_1 = \alpha_1$ u. s. w. sein müsse. Aber auch, wenn wir von der obigen speciellern Form ausgehen, und man die erst zu folgernde Identität der beiden Entwicklungen im Grunde nicht schon voraussetzt, so ist die Sachlage, dass $a_1 x + a_2 x^2 \dots$ und $\alpha_1 x + \dots$ als bis zu einem gewissen Werthe von x convergirende Reihen gedacht werden, die bis zu diesem Werthe, indem sie zugleich mit $f x$, für $x = 0$, $= 0$ werden, durch ihre Grenzen eine Darstellung der Werthe der Function $f x$ geben. Daraus ergibt sich denn allerdings, dass auch $x(a_1 + a_2 x + \dots) = x(\alpha_1 + \alpha_2 x + \dots)$,

zu $a_{n-1} x^{n-1}$ kleiner als jede gegebene Grösse werden kann, woraus dann leicht $a_1 = \alpha_1$ u. s. w. folgt, weil eine zwischen ihnen angenommene Differenz kleiner als jede gegebene sein müsste.

Wenn in der Leibnitzischen Ausdrucks-Weise gesagt würde, dass, so bald x unendlich klein werde, gegen die ersten Glieder der beiden Reihen die folgenden, als gegen sie unendlich klein, weggelassen werden könnten, hieraus $a_1 x = \alpha_1 x$, $a_1 = \alpha_1$ folge, so würden damit die vorhergehenden Reflexionen eben nur auf eine andre Weise ausgesprochen worden sein. Wenn nun bei Bildung der Differential-Gleichungen Leibnitz die höheren Potenzen der Incremente als unendlich klein gegen die ersten wegliess, die sich an Lagrange anschliessenden Darstellungen aber ebenfalls nur die mit den ersten Potenzen behafteten Glieder berücksichtigen, aus dem Grunde, weil dieselben nach der Methode der unbestimmten Coefficienten für sich eine identische Gleichung bilden müssen: — so scheint durch das Vorhergehende hinlänglich angedeutet zu sein, wie weit diese Methoden im Wesentlichen als von einander verschieden angesehen werden können.*)

folglich, so lange x noch einen wirklichen Werth hat, auch $a_1 + a_2 x \dots = \alpha_1 + \alpha_2 x \dots$, nämlich beide gegen den Werth $\frac{f'x}{x}$ convergirende Reihen sein müssen; setzt man aber $x = 0$, so erhält man $a_1 \times 0 = \alpha_1 \times 0$, aus welcher Gleichung für die Gleichheit von a_1 und α_1 kein Schluss zu ziehen ist. Dass, in wie verschiedener Weise auch $a_1 + a_2 x \dots$ und $\alpha_1 + \alpha_2 x \dots$ convergirend sein mögen, dennoch eine durchgängige Gleichheit ihrer Grenzen für $x > 0$ nicht stattfinden kann, ohne dass $a_1 = \alpha_1$, folgt klar erst aus dem leicht zu erweisenden Satze, dass, bei continuirlicher Abnahme der x die Grenzen beider convergirenden Reihen $a_2 x + a_3 x^2 \dots$ und $\alpha_2 x + \alpha_3 x^2 \dots$ kleiner als jede gegebene Grösse werden können.

*) Definiren wir die Differentialien als den allgemeinen Ausdruck der Incremente abhängiger Grössen nach Ausscheidung der Bestimmungen, die, indem die Incremente stätig bis zu ihrer Grenze $= 0$ abnehmen, im Verhältniss zu denselben kleiner als jede gegebene Grösse werden können, — und indem

III.

Da wir oben das Princip der Taylorschen Reihe als mit der Vorstellung der continuirlichen Aenderung der Functionen eng verbunden erklärt haben, so kann es nothwendig erscheinen, in eine allgemeine Untersuchung der Frage einzugehen, auf welche allerdings jede allgemeine Darstellung der Principien des Infinitesimal-Calculs hinführt, ob nämlich mit der Vorstellung der continuirlichen Aenderung der unabhängigen Variabeln auch die der continuirlichen Aenderung der abhängigen nothwendig verknüpft werden müsse. Man wird sich einer abstracten Behandlung dieser Frage allerdings in so fern überheben können, als, wenn auch die Bejahung der angeregten Frage den allgemeinen Darstellungen des genannten Calculs als Voraussetzung zu Grunde

Leibnitz die Differenzen unendlich klein setzt, so hat dies im Grunde keinen andern Sinn, als dass die eben characterisirten Bestimmungen aus ihnen weggelassen werden sollen — so fällt die Basis der analytischen Grund-Operationen von Lagrange in der That ganz zusammen mit der von Leibnitz. So z. B. entsteht nach dem letztern aus der Gleichung $y^m = x^n$ die andere: $m y^{m-1} \Delta y + q \Delta y^2 \dots = n x^{n-1} \Delta x + r \Delta x^2 \dots$ und hieraus, Δy und Δx unendlich klein gesetzt, $m y^{m-1} \partial y = n x^{n-1} \partial x$, d. h., indem Δx und Δy stätig abnehmen, können $\Delta x - \partial x$ und $\Delta y - \partial y$, so wie $\Delta x^2 \dots \Delta y^2 \dots$, gegen ∂x und ∂y beliebig klein werden, woraus $m y^{m-1} \partial y = n x^{n-1} \partial x$ folgt, weil ein angenommener Unterschied im Verhältniss zu ihnen kleiner als jeder gegebene sein müsste. Lagrange, um aus der Gleichung $y^m = x^n$ die derivirte Function von y , y als Function von x betrachtet, abzuleiten, schliesst: Indem x das Increment h erhält, geht y über in $y + y' h + y'' \frac{h^2}{1.2} + \dots$ und folglich ist $m y^{m-1} y' h + \dots = n x^{n-1} h + \dots$, folglich $m y^{m-1} y' = n x^{n-1}$. Aus dem, was wir so eben über die Methode der unbestimmten Coefficienten, durch deren Anwendung die letzte Gleichung herbeigeführt wird, gesagt haben, geht mit einiger Ueberlegung klar hervor, wie das Resultat y' oder $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{n x^{n-1}}{m y^{m-1}}$ in beiden Fällen durch im Wesentlichen ganz übereinstimmende Schlüsse gewonnen wird.

liegt, die wirkliche Auffindung der Differential-Coefficienten in den concreten Fällen nur durch eine Kenntniss der Abhängigkeit der beiden Variabeln von einander möglich wird, für welche eine allgemeine Ausnahme von dieser Voraussetzung, wenn sie stattfinden sollte, bei der Aufsuchung selbst hervortreten müsste. Was sich abstracter Weise zur Beantwortung der Frage sagen lässt, möchte sich auf Folgendes beschränken. Gesetzt $f x$ habe für $x = a$ einen möglichen Werth und die Natur der Function lasse eine continuirliche Veränderung des ihre Werthe bestimmenden Werthes von x zu, ohne dass jene unmittelbar durch eine solche Veränderung unmöglich werden, so ist zunächst soviel klar, dass es, wegen continuirlicher Aenderung der Grösse x , wie keinen unmittelbar auf $x = a$ folgenden Werth der x , so auch keinen unmittelbar auf $f a$ folgenden Werth der Function geben könne. Nun muss aber wegen der im Begriffe durchgängigen Bestimmtheit der auf $f a$ zunächst folgenden Werthe $f(a + \omega)$ die Art (Qualität) der unmittelbaren Veränderung nothwendig durch die Natur der Function bestimmt und aus ihr erkennbar sein, und es wird also, wenn wir zunächst die allgemeinste Characterisirung dieser Veränderung ins Auge fassen, $f(a + \omega)$, wenn ihre Werthe nicht constant bleiben, als unmittelbar zu- oder abnehmend durch die Natur der Function bestimmt sein müssen. Da es nun, wie gesagt, keinen auf $f a$ unmittelbar folgenden Werth $f(a + \omega)$ geben kann, so wird $f(a + \omega)$ als bis zu einem gewissen Werthe von ω , wenn nicht continuirlich constant, continuirlich ab- oder zunehmend nothwendig gedacht werden müssen. Damit ist nicht gesagt, dass $f x$ nicht unmittelbar nach $x = a$ einen Continuitätsbruch erleiden könne, so dass $f(a + \omega) - f a$, wie klein auch ω gedacht werden möge, dennoch nicht kleiner als die bestimmte Grösse α werden könne, wohl aber, dass eine solche Unterbrechung der Continuität nur bei einer unmittelbar folgenden continuirlichen Aenderung (falls die

Werthe der Function nicht continuirlich constant bleiben) möglich sein kann, also nur für particuläre Werthe von x . Das Beispiel eines Continuitäts-Bruches der eben erwähnten Art giebt die Grenze, der sich das Integral $\int_z^\pi \frac{\sin nx}{z \sin \frac{1}{2}x} \partial x$, für den ohne Ende wachsenden Werth von n nähert, und die als Function von z betrachtet werden muss; es ist aber der Werth derselben für alle Werthe von z zwischen 0 und π constant $= 0$ und nur, wenn $z = 0$ ist, $= \frac{1}{2} \pi$.

Wenn durch die Natur der Function fx und den Werth $x = a$ die für diesen Werth stattfindende Veränderung der Grösse fx ihrer Art nach durchaus bestimmt sein muss, so wird die Mathematik das Qualitative dieser Veränderung, den specifischen Unterschied der Functionen, auf Bestimmungen der Quantität zurückzuführen haben. Ausser der Bestimmtheit dieser Veränderung nach ihrem allgemeinsten Character, nämlich des blossen Zunehmens oder Abnehmens der Function, wird dieselbe sich specieller characterisiren durch das Verhältniss der Zu- oder Abnahme zu dem Incremente der sie bestimmenden Grösse, d. h. durch das Verhältniss $\frac{f(x + \omega) - fx}{\omega}$, oder, falls dieses nicht constant ist, durch die Art seiner Veränderung, und es muss also auch dieses wiederum als ein unmittelbar mit dem Beginne der ω ab- oder zunehmendes, also, da es keinen unmittelbar ersten Werth der ω giebt, als unmittelbar bis zu einem gewissen Werthe derselben stätig ab- oder zunehmend, durch die Natur der Function nothwendig bestimmt und diese Bestimmtheit desselben aus der Natur der Function erkennbar sein. Demnach werden wir es also als mit dem Begriffe einer Function unvereinbar erklären müssen, dass dieses Verhältniss z. B. $= \sin \left(\frac{x}{\omega} \right)$, oder also $f(a + \omega) = fa + \omega \sin \left(\frac{x}{\omega} \right)$ (falls fa einen wirklichen Werth hat) sein könne, da durch $\omega \sin \left(\frac{x}{\omega} \right)$ durchaus keine bestimmte Art der

Veränderung festgestellt wäre, indem, wie klein auch ω gedacht werden möge, dennoch $\sin \frac{x}{\omega}$ bis zu $\omega = 0$ beständig noch alle zwischen $+1$ und -1 liegende Werthe haben kann.

IV.

Es sei nun $f x$ eine beliebige Function von x , die für $x = a$ und von $x = a$ bis $x = a + b$ nur mögliche endliche Werthe habe, welche einer stätigen Veränderung unterworfen sind, mag man nun eine solche Veränderung bloss voraussetzen, oder es als begründet durch die Reflexionen des vorhergehenden Abschnittes ansehen, dass die durch die continuirlich veränderlichen Werthe der Grösse x allgemein und völlig bestimmten Werthe der abhängigen Grösse nur für particuläre Werthe der ersteren eine Unterbrechung ihrer Continuität erleiden können. Seien nun die für die Unabhängige in den folgenden Betrachtungen gesetzten Werthe stets zwischen den angegebenen Grenzen liegend, so wird $f(x + \omega) - f x$, und folglich*) auch $\frac{f(x + \omega) - f x}{\omega}$, für ein bestimmtes x zugleich mit ω nur stätig sich verändern können. Denken wir uns nun in dem Quotienten $\frac{f(x + \omega) - f x}{\omega} = \varphi(x, \omega)$ die ω stätig bis zu ihrer Grenze $= 0$ abnehmend, so wird von einem gewissen Werthe an $\varphi(x, \omega)$, als von da bis $\omega = 0$, beständig entweder abnehmend oder

*) Analysirt man den Begriff der abhängigen stätigen Veränderung nicht weiter, als bis zu dem Satze: Eine abhängige Grösse ändert sich stätig, wenn sich eine Reihe successiver Werthe derselben geben lässt, zwischen denen dieselbe als nur zunehmend oder abnehmend, und deren Differenz kleiner als jede gegebene gedacht werden kann — und auf eine weiter gehende Analysis darf, scheint uns, die Mathematik sich nicht einlassen, ohne auf einen ihr fremden Boden zu gerathen —: so ist leicht zu zeigen, dass, wenn x und y sich stätig verändern, auch die nach den arithmetischen Grundoperationen von ihnen abhängigen Grössen, $\dots x + y, x \times y, \text{etc.} \dots$ stätig sich verändern müssen. Wir werden dieses als zugegeben für das Folgende voraussetzen.

zunehmend gedacht werden müssen, da ohne dies, wie bereits in III. bemerkt wurde, die für den bestimmten Werth von x stattfindende Veränderung einer qualitativen Bestimmtheit gänzlich entbehren würde, welche doch durch die Bestimmtheit der Function und den Werth von x gegeben und aus beiden erkennbar sein muss.

Demnach, da $\varphi(x, \omega)$ von einem gewissen Werthe der ω an bis zu $\omega = 0$ als nur abnehmend oder nur zunehmend nothwendig gedacht werden muss, so können zwei Fälle stattfinden: entweder dieses Zunehmen oder Abnehmen ist ohne Grenze, mit andern Worten, die Grenze ist $+\infty$ oder $-\infty$, und zwar findet dieses für alle Werthe von x ohne Ausnahme statt, oder $\varphi(x, \omega)$ nähert sich stätig grösser oder kleiner werdend einem Grenz-Werthe*), der, wenn überhaupt veränderlich, eine Function von x sein muss, die in ihrer allgemein stätigen Veränderung

*) Wir machen darauf aufmerksam, dass dieser Grenz-Werth hier nicht als Werth von $\varphi(x, \omega)$ für $\omega = 0$, sondern durchaus als ein „extremum exclusivum“ der durch $\varphi(x, \omega)$ repräsentirten Werthe des Quotienten $\frac{f(x+\omega) - fx}{\omega}$ betrachtet wird. Es ruht hier alles auf dem Gedanken, dass in dem Begriff einer qualitativ bestimmten Veränderung, und diese liegt ja im Begriff einer Function, nothwendig enthalten ist, dass $\frac{f(x+\omega) - fx}{\omega}$, — gerade weil es bei stätiger Veränderung der ω keinen unmittelbar ersten Werth des Quotienten giebt, und die unmittelbar mit dem Beginne der ω eintretende Veränderung doch qualitativ bestimmt sein muss —, indem wir nur die allgemeinste Characterisirung einer Grössen-Veränderung in's Auge fassen, ein mit dem Beginne der ω zunächst nur Zunehmendes oder Abnehmendes sein muss. Darauf beruht dann umgekehrt der Schluss, dass indem wir ω bis $\omega = 0$ (extremum exclusivum) abnehmend denken, die Function $\varphi(x, \omega)$, weil von einem gewissen Werth an nur abnehmend oder zunehmend, entweder ohne alle Grenze grösser oder kleiner werden kann, — wobei wir die Veränderung der Grösse von $-\infty$ gegen $+\infty$ allgemein als Zunahme, die umgekehrte als Abnahme betrachten —, oder einem gewissen Werthe, da die Function $\varphi(x, \omega)$ keinen letzten, wie keinen unmittelbar ersten Werth haben kann,

nur für specielle Werthe von x eine Unterbrechung derselben erleiden, $= +\infty$ oder $-\infty$ werden kann. Diese stätige Veränderung kann

continuirlich sich annähert, so dass der Unterschied kleiner als jeder gegebene werden kann; dieser Werth, oben mit p bezeichnet, die Grenze von $\frac{f(x+\omega)-fx}{\omega}$ für abnehmende ω , kann auch $=0$ sein. — Lagrange (Leçons, pg. 2) sagt: „On peut observer, que c'est improprement, qu'on applique le mot connu de limite à ce que devient une expression analytique lorsqu'on y fait évanouir certaines quantités, parceque ces limites, après avoir déchu jusqu'à zéro, pourraient encore devenir négatives . . . Les véritables limites, suivant les notions des anciens, sont des quantités, qu'on ne peut passer, quoiqu'on puisse s'en approcher aussi près que l'on veut; telle est, par exemple, la circonférence du cercle à l'égard des polygones inscrit et circonscrit etc.“ Es ist auffallend, wie Lagrange bei diesen Einwendungen gegen den Gebrauch, den Mac-Laurin und d'Alembert von dem Begriffe der Grenze gemacht haben, sich so ganz von der formellen Ansicht des Calculs leiten lässt. Wenn der Werth einer als abhängig gedachten Grösse angegeben werden soll für den Fall, dass die sie bestimmende Grösse x verschwunden, $=0$ gesetzt ist, so kann diese Forderung eine allgemeine, unmittelbare oder directe Bedeutung offenbar nur aus dem Gesichtspunct der stätigen Veränderung haben; es soll nämlich die Grösse, oder Grössen-Bestimmung gegeben werden, der sich die abhängige Variable stätig annähert, wenn x bis zu seiner Grenze als Grösse, bis $=0$ abnimmt. Wenn es eine solche nicht giebt, hat es auch keine Bedeutung, wenn $x=0$ gesetzt wird, wie dies z. B. der Fall ist für $\sin\left(\frac{a}{x}\right)$.

In $\varphi(x, \omega) = \frac{f(x+\omega)-fx}{\omega}$, $\omega=0$ setzen, heisst also eigentlich nichts anderes, als den Werth finden, dem sich $\frac{f(x+\omega)-fx}{\omega}$ stätig für den abnehmenden Werth von ω annähert, und dieser ist in der That „une véritable limite, suivant les notions des anciens“, da so lange die Function $\varphi(x, \omega)$ wirklich bloss als Ausdruck des Verhältnisses $f(x+\omega)-fx:\omega$ gedacht wird, sie diesen Werth nicht erreichen kann, weil es so lange ihrer Definition widerstreitet, $\omega=0$ zusetzen. Wir haben in der oben gegebenen Darstellung vermieden, die Grenze dieses Verhältnisses als den Werth der Function $\varphi(x, \omega)$ für $\omega=0$ zu bestimmen, da es uns grade darauf anzukommen schien, darzuthun, dass $\varphi(x, \omega)$, für $\omega=0$, im Allgemeinen immer eine bestimmte Bedeutung haben müsse.

wiederum als blosser Folge der einmal zu Anfang gemachten Voraussetzung angesehen werden, da aus ihr sogleich sich ergibt, dass $\frac{f(x+\omega) - f x}{\omega}$ oder $\varphi(x, \omega)$ nicht allein mit ω , sondern auch mit x für ein bestimmtes ω continuirlich sich ändern müsse, woraus der Schluss auf eine gleiche Veränderung der Grenzen von $\varphi(x, \omega)$ bei stätigem Abnehmen des Werthes von ω leicht zu ziehen ist.

Es sei nun $b = n \omega$, n eine ganze positive Zahl, so ist

$$f(a+b) - f a = f(a+\omega) - f a + (f(a+2\omega) - f(a+\omega)) \dots \\ + (f(a+b) - f(a+(n-1)\omega))$$

es näherte sich ferner das für die verschiedenen Werthe von $x \dots (a, a+\omega \dots a+(n-1)\omega)$ stattfindende Verhältniss der Incremente $\frac{f(x+\omega) - f x}{\omega}$, $= \varphi(x, \omega)$, indem die ω bis zu ihrer Grenze $= 0$ abnimmt, einer für alle x unveränderlichen Grenze $= p$, so wird, da von einem gewissen Werthe der ω an $\varphi(x, \omega)$ nur und zwar stätig abnehmend oder zunehmend sein kann, $\varphi(x, \omega)$ für alle Werthe von x als zwischen $p + \alpha$ und $p - \alpha$ enthalten angesehen werden können, wo, je kleiner ω ist, desto kleiner α , und, wie jene, kleiner als jede gegebene Grösse gedacht werden kann. Es kann also auch jeder der n Theile, in welche wir so eben das Increment $f(a+b) - f a$ zerlegt haben, betrachtet werden als enthalten zwischen $(p + \alpha) \omega$ und $(p - \alpha) \omega$, und es ist demnach $f(a+b) - f a < n(p + \alpha) \omega$ und $> n(p - \alpha) \omega$, d. h. $< (p + \alpha) b$ und $> (p - \alpha) b$, d. h. da in der obigen Zerlegung n grösser als jede gegebene, oder ω , folglich auch α , kleiner als jede gegebene Grösse gedacht werden kann, es ist $\frac{f(a+b) - f a}{b} = p$ oder $f(a+b) - f a = p b$.

Wäre $\varphi(x, \omega)$, indem die ω bis zu ihrer Grenze $= 0$ abnimmt, für alle Werthe von x ohne Grenze zunehmend oder abnehmend, so würde für p in der vorhergehenden Entwicklung eine beliebig grosse positive

oder negative Zahl zu substituiren sein und es ergäbe sich, in andrer Ausdrucks-Weise, $f(a \pm b) - fa = \pm \infty \cdot b$, so dass dieser Fall der durchweg mangelnden Grenze als in der Annahme einer durchweg constanten Grenze enthalten angesehen werden kann.

Es ist demnach unter der Annahme einer für alle Werthe von x zwischen a und $a \pm b$ constanten Grenze p des Verhältnisses der abnehmenden Incremente von x und fx , welchen Werth von $-\infty$ bis $+\infty$ dieselbe auch haben möge, $f(a \pm b) - fa = p b$, oder $fx - fa = px - pa$, oder $fx = px \pm \text{Const.}$

Die vorhergehenden Betrachtungen enthalten den einfach aus der Natur der Sache selbst geschöpften Grund, weshalb, wenn die nach steigenden Potenzen von ω fortschreitende Reihe $k \omega^\alpha \pm m \omega^{\alpha+\beta} \pm \dots$ als allgemeine Entwicklung von $f(x \pm \omega) - fx$ angesehen werden kann oder soll, $\alpha = 1$ sein muss, weil, wenn $\alpha > 1$, die so eben mit p bezeichnete Grenze constant $= 0$, wenn $\alpha < 1$, constant $= \infty$ sein würde, und hieraus fx im erstern Falle $= \text{Const.}$, im andern Falle $= \infty$ sich ergäbe.

Es hat sich also der angenommene Fall einer für die abnehmenden Werthe von ω unveränderlichen Grenze des Verhältnisses $(f(x \pm \omega) - fx) : \omega$ als mit der Veränderlichkeit dieses Verhältnisses selbst im Widerspruch stehend gezeigt. Bezeichnen wir nun, nach Lagrange, die veränderliche Grenze dieses Verhältnisses, welche nur von x abhängig sein kann, und mit dieser Grösse, wie bereits oben bemerkt wurde, ständig sich verändern muss, mit $f'x$, so ist allgemein $f(x \pm \omega) - fx = f'x \cdot \omega \pm \psi(x, \omega)$, wo ψ eine Function bezeichnet, die, indem ω bis $= 0$ abnimmt, im Verhältniss zu ω , also im Allgemeinen auch zu $f'x \cdot \omega$, kleiner als jede gegebene Grösse werden kann. Da nur für specielle Werthe von x $f'x = 0$, oder $= \infty$ werden kann, so wird auch nur für specielle Werthe von x eine von der vorherigen abweichende Entwicklung

$f(x + \omega) - f(x) = k \cdot \omega^\alpha + \beta$, so dass β gegen $k \omega^\alpha$ unendlich klein werden kann, stattfinden können, solche aber, je nachdem $\alpha >$ oder < 1 , durch $f'(x) = 0$ oder $f'(x) = \infty$ angezeigt werden.

Vertauschen wir $x + \omega$ mit x in $\frac{f(x + \omega) - f(x)}{\omega} = f'(x) + \frac{\psi(x, \omega)}{\omega}$, so erhalten wir $\frac{f(x) - f(x - \omega)}{\omega} = f'(x - \omega) + \frac{\psi(x - \omega, \omega)}{\omega}$ und folglich auch, wie sich sogleich ergibt, $f'(x)$ als Grenze des Verhältnisses $(f(x) - f(x - \omega)) : \omega$, oder als Grenze von $\frac{f(x - \omega) - f(x)}{-\omega}$, indem ω bis $= 0$ abnimmt. Es ist demnach $f'(x)$ die Grenze des mehrerwähnten Verhältnisses, mag man das Increment der Unabhängigen additiv oder subtractiv nehmen, und es ist für beide Fälle $f(x + \omega) - f(x) = f'(x) \cdot \omega + \alpha$, wo jedoch unter α vorläufig noch keine bloss durch Vertauschung von $+ \omega$ und $- \omega$ für beide Fälle gültige analytische Formel, sondern nichts weiter als eine Grösse gedacht wird, welche in beiden Fällen kleiner als jede gegebene im Verhältniss zu ω werden kann, indem diese stätig bis $= 0$ abnimmt. Das so eben gewonnene Resultat bildet die eigentliche allgemeine Basis der Differential-Rechnung, in sofern in ihm enthalten ist, dass die Incremente von einander abhängiger Grössen bei continuirlicher Abnahme derselben im Allgemeinen immer in einem solchen Verhältnisse zu einander bleiben müssen, dass jede Bestimmung, die gegen das eine, auch gegen das andere unendlich klein wird.

V.

Gehen wir jetzt auf die im vorigen Abschnitt vorgenommene Zerlegung des Incrementes $f(a + b) - f(a)$ zurück, so kann jeder der Theile derselben durch $f'(x) + \alpha$ dargestellt werden, wo α bloss in der so eben characterisirten Bedeutung zu nehmen ist. Wenden wir nun auf diese Zerlegung den leicht zu erweisenden Fundamental-Satz der Exhaustions-Methode an, nach welchem, wenn gleichzeitig die Grössen

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ einzeln im Verhältnisse zu den Grössen $a_1, a_2, a_3 \dots$, dann auch, unabhängig von ihrer Anzahl, die Summe der ersteren im Verhältnisse zu der Summe der letzteren kleiner als jede gegebene Grösse werden kann, so ist

$$(f' a + f'(a + \omega) + f'(a + 2\omega) \dots + f'(a + (n-1)\omega)) \omega$$

$= f(a + b) - fa - \beta$, wo β eine von ω oder n abhängige positive oder negative Grösse bezeichnet, die, indem ω abnimmt oder n zunimmt, kleiner als jede gegebene im Verhältniss zu $f(a + b) - fa$ werden kann, oder dieses Increment ist die Grenze jener Summe, indem ω bis $= 0$ (extr. excl.) abnimmt. Es sind demnach die Veränderungen, die eine Function $f x$ durch die Veränderung der x erleidet, durch die von ihr abgeleitete Function $f' x$ für den Begriff vollständig bestimmt, so dass, wenn von einem constanten Unterschied der Werthe mehrerer Functionen abgesehen und nur ihr specifischer Character, ihre Veränderlichkeit, in Betrachtung gezogen wird, dieselben durch die von ihnen abgeleitete Function völlig bestimmt, oder wie man es auch aussprechen kann, völlig definirt sind.*)

*) Bekanntlich liegt die vorhergehende Betrachtung der sogenannten Integrations-Methode der Quadraturen zu Grunde, und wenn man in neuerer Zeit ihr einen Platz nur bei Behandlung der Annäherungs-Methoden oder der bestimmten Integralien überhaupt einzuräumen pflegt, so nahm die ursprüngliche Ansicht des Integrals grade von ihr den Ausgang. (Calculus summatorius, Leibnitz.) In der That lässt sich gegen die rein indirecte Auffassung des Integrirens, wie sie sich am schärfsten in den (S. I.) angeführten Worten von Lagrange ausspricht: „Le calcul différentiel considéré dans toute sa généralité consiste à trouver, . . . le calcul intégral consiste à retrouver . . .“ aus logischem Gesichtspunct der Einwand machen, dass sobald die primitiven Functionen nicht eines algebraischen Ausdrucks im engeren Sinne fähig sind, nicht recht deutlich ist und zwar gerade in Bezug auf die allgemeinen Integrale, was eigentlich gefunden werden soll. Es ist offenbar bloss conventionell, wenn man z. B. diejenige Function, deren derivirte $= \frac{1}{x}$ ist, glaubt

Um jedoch zu einer klaren Einsicht in die eben hervorgehobene Bestimmung des Incrementes $f(a+b) - f a$, als der Grösse, der sich die Summe $f' a \cdot \omega + \dots + f'(a+(n-1)\omega) \cdot \omega$ bei abnehmenden Werthen der ω annähert, zu gelangen, ist Folgendes zu erwägen. Betrachten wir die zugleich mit ω veränderlichen Summen

$(\varphi a + \varphi(a+\omega) + \varphi(a+2\omega) \dots + \varphi(a+(n-1)\omega)) \omega, \dots A$
und $(\varphi(a+\omega) + \varphi(a+2\omega) \dots + \varphi(a+b)) \omega, \dots B$
wo φx eine beliebige Function von x , $b = n\omega$ und n eine beliebige ganze Zahl ist. Es seien die Werthe der Function zwischen $x=a$ und $x=a+b$ nur zunehmend, so ergibt sich, dass, wenn die Differenz der Werthe von x , statt $= \omega$, $=$ einem aliquoten Theile dieser Grösse, $= \frac{\omega}{r}$, also $b = nr \cdot \frac{\omega}{r}$, gesetzt wird, an die Stelle des Gliedes $\varphi(a+s\omega)\omega$

dadurch besser definirt zu haben, als sie es durch diese Angabe selbst schon ist, wenn man sie log. nat. x nennt. Uns scheint, dass eine allgemeine Ansicht des Integrirens nur vom bestimmten Integral ausgehen könne, und diesem zunächst eine ganz directe Bedeutung beilegen müsse. — Es hangen hiemit manche andere Auffassungen zusammen. So z. B. pflegt man die Rectification der Curven in der Weise zu behandeln, dass dieser Begriff selbst als ein gegebener angesehen wird, die Vorstellung der rectificirten Curven als Grenzen der Umfänge eingeschriebener oder umschriebener Polygone nur eine Hülfsvorstellung sein soll. Wenn dabei die Sache so angesehen wird, als werde jeder schon aus der Erfahrung wissen, was das sei, „eine rectificirte Curve“, so ist vielmehr zu bemerken, dass sich in der Erfahrung an den Phänomenen der Elasticität u. s. w. zu erkennen giebt, dass ein Körper durch Krümmung seiner Oberfläche ein physikalisch anderer wird.

$\int (1 + \varphi' x^2)^{\frac{1}{2}} dx$ enthält, gerechtfertigt als Ausdruck der Grenze eingeschriebener oder umschriebener Polygon-Umfänge der Curve $y = \varphi x$, nichts als die Definition des Begriffs der rectificirten Curve, und zu beweisen ist hiebei nichts anderes als die Gültigkeit des Begriffes, in sofern, als gezeigt werden muss, dass für die Umfänge eingeschriebener oder umschriebener Polygone bei abnehmender Grösse ihrer Seiten in der That eine Grenze vorhanden ist.

in (A) treten würde $\left(\varphi(a + s\omega) + \varphi\left(a + \frac{sr+1}{r} \cdot \frac{\omega}{r}\right) + \dots + \varphi\left(a + \frac{sr+r-1}{r} \cdot \frac{\omega}{r}\right) \right) \frac{\omega}{r} = \frac{1}{r} \left(\varphi(a + s\omega) + \dots + \varphi\left(a + \frac{sr+r-1}{r} \cdot \frac{\omega}{r}\right) \right) \omega$, welcher Ausdruck, wie sogleich aus der über φx gemachten Voraussetzung erhellt, $> \omega \cdot \varphi(a + s\omega)$ und $< \omega \cdot \varphi(a + (s+1)\omega)$ ist. Hieraus folgt leicht, dass durch Zerlegung der Differenz ω in r aliquote Theile der Werth von (A) grösser wird, die Zunahme aber $< (\varphi(a+b) - \varphi a) \omega$ ist. Durch dieselbe Zerlegung würde an die Stelle von $\varphi(a + s\omega)$ in (B) treten $\left(\varphi\left(a + \frac{sr-r+1}{r} \cdot \frac{\omega}{r}\right) + \dots + \varphi(a + s\omega) \right) \frac{\omega}{r} < \varphi(a + s\omega) \omega$ und $> \varphi(a + (s-1)\omega)$; es würde demnach der Werth von (B) kleiner werden, die Abnahme aber weniger betragen als $(\varphi(a+b) - \varphi a) \omega$. Indem also durch fortwährende Zerlegung der Differenzen der Werthe von x in aliquote Theile die Summe (A) beständig zunimmt, (B) beständig abnimmt, ihre Differenz aber, $= (\varphi(a+b) - \varphi a) \omega$, zugleich mit ω kleiner als jede gegebene werden kann, so erhellt, dass durch eine solche Zerlegung der Werth beider Summen sich einer zwischen ihnen liegenden Grösse als ihrer Grenze, die eine zunehmend, die andere abnehmend, fortwährend annähert. Dass diese Grenze von der Art der fortwährenden Zerlegung in aliquote Theile nicht abhängig sein könne, ergibt sich einfach so. Gesetzt es sei $b = n\omega = r\alpha$, so würde dadurch, dass man in den Summen

$$\left(\varphi a + \varphi(a + \alpha) + \dots + \varphi(a + (r-1)\alpha) \right) \alpha \quad (1)$$

$$\text{und} \quad \left(\varphi a + \varphi(a + \omega) + \dots + \varphi(a + (n-1)\omega) \right) \omega \quad (2)$$

α in n und ω in r , also b in nr aliquote Theile zerlegte, wodurch beide einander gleich würden, die erstere, wie eben vorher gezeigt wurde, vergrössert sein um weniger als $(\varphi(a+b) - \varphi a) \alpha$, die andere um weniger als $(\varphi(a+b) - \varphi a) \omega$, d. h. beide um Grössen, die zugleich mit α und ω kleiner als jede gegebene werden können, woraus sich sogleich

ergiebt, dass auch die Differenz der Summen (1) und (2) zugleich mit α und m kleiner als jede gegebene werde, folglich die Art der Zerlegung der Differenzen von x auf die Grenze der Summe (A) oder (B) keinen Einfluss haben könne.

Durch den vorhergehenden ganz analoge Betrachtungen ergibt sich, dass, wenn φx von $x = a$ bis $x = a + b$ nur abnehmend ist, durch fortwährende Zerlegung der Differenzen von x , die Summe (A) abnehmend, die Summe (B) zunehmend, einer zwischen ihnen liegenden Grenze sich annähern müsse.

Bezeichnen wir zunächst die unter den vorausgesetzten Bedingungen des fortwährenden Zunehmens oder Abnehmens von φx für die Summen (A) und (B) bei abnehmender Differenz der Werthe von x stattfindende Grenze mit $\int_a^{a+b} \varphi x \partial x$, so ergibt sich durch leichte Ausführung der eben angestellten Betrachtungen, dass, wenn unter Aufhebung jener Bedingungen φx zwischen a und $a + b$ beliebige Maxima oder Minima für die Werthe $x = u$, $x = y$, $x = z \dots$ hat, die Summen (A) und (B) bei abnehmender Differenz der Werthe von x sich einer Grösse annähern müssen $= \int_a^u \varphi x \partial x + \int_u^y \varphi x \partial x + \int_y^z \varphi x \partial x, \dots$ so dass die Differenz $<$ jede gegebene werde. Wenn wir nun auch diese Grösse durch $\int_a^{a+b} \varphi x \partial x$ bezeichnen, so ist nur zu bemerken, dass man dieselbe nicht eigentlich als Grenze der Summen (A) und (B) definiren könne, weil, wenn φx abwechselnd grösser und kleiner wird, der Werth dieser Summen bald diesseits, bald jenseits jener Grösse liegen kann. Um eine ganz klare directe Bedeutung des Ausdrucks $\int_a^z \varphi x \partial x$ festzuhalten, definiren wir ihn desshalb als die Summe der Grenzen, denen sich, in den Intervallen, wo φx nur abnehmend oder zunehmend ist, die Summen (A) oder (B), die eine zunehmend, die andere abnehmend, bei fortwährender Zerlegung der Differenzen von x in aliquote Theile fortwährend

annähern, welche Grenzen-Summe zugleich die Grösse ist, der die veränderliche Summe

$$\varphi a \triangle x + \varphi (a + \triangle x) \triangle x + \dots + \varphi (a + (z - \triangle x) \triangle x$$

überhaupt, indem $\triangle x$ bis $= 0$ abnimmt, in der Art sich annähert, dass der Unterschied, positiv oder negativ, kleiner als jeder gegebene wird.

Wir werden demnach die zu Anfang dieses Abschnittes gewonnene Bestimmung des Incrementes $f(a + b) - fa$ als die unmittelbar in dem Ausdruck $\int_a^{a+b} f'x \partial x$ enthaltene anzusehen haben, so wie umgekehrt aus der ganz selbstständigen und directen Bedeutung, die wir dem Symbol $\int_a^z \varphi x \partial x$ beigelegt haben und zufolge deren es, wenn $a = \text{Const.}$, eine Function von z , $= Fz$, repräsentirt, eben so direct sich folgern lässt, dass $\varphi z = F'z$, d. h. $=$ der Grenze des Verhältnisses $F(z + \omega) - Fz : \omega$, für abnehmende Werthe von ω sein müsse. Wir knüpfen hier diese Folgerung an eine Betrachtung, die zugleich eine wesentliche Grundlage der später folgenden Erörterungen bildet.

Aus der directen dem Ausdruck $\int_a^z \varphi x \partial x$ gegebenen Bedeutung geht nämlich ohne Weiteres hervor, dass, wenn ψx und χx zwei Functionen von x bezeichnen, von denen für alle Werthe von x , von $x = a$ bis $x = z$, die erstere*) $> \varphi x$, die andere $< \varphi x$ ist, dann auch der Werth von $\int_a^z \varphi x \partial x$ zwischen den Werthen von $\int_a^z \psi x \partial x$ und $\int_a^z \chi x \partial x$ liegen müsse; für die veränderlichen Grössen ψx und χx

*) Wir nehmen hier, wie in ähnlichen Fällen, die Veränderung einer Grösse von $-\infty$ gegen $+\infty$ als Zunahme, die umgekehrte als Abnahme, so dass also nach der obigen Annahme $\int \psi x \partial x$, wenn vom Zeichen abgesehen wird, positiv — einen grösseren, negativ — einen kleineren Werth hat, als $\int \varphi x \partial x$ zwischen denselben Grenzen.

können auch zwei denselben Bedingungen entsprechende constante Grössen m und n substituirt werden, und die Folgerung bleibt nicht minder gültig, wenn m und n den grössten und kleinsten Werth bezeichnen, den φx in dem Intervall $x=a$ bis $x=z$ annimmt, so dass unter dieser Annahme $\int_a^z \varphi x \partial x < m(z-a)$ und $> n(z-a)$ sein muss.

Demnach wird denn auch, wenn in $Fz, = \int_a^z \varphi x \partial x$, z in $z+\omega$ übergeht, und wir, was immer möglich ist, ω so bestimmen, dass φx von $x=z$ bis $x=z+\omega$ nur zunehmend oder abnehmend ist, das Increment $F(z+\omega) - Fz, = \int_z^{z+\omega} \varphi x \partial x$, zwischen $\varphi(z+\omega)\omega$ und $\varphi z \cdot \omega$ liegen müssen, folglich wird $\frac{F(z+\omega) - Fz}{\omega}$ enthalten sein zwischen φz und $\varphi(z+\omega)$, d. h. die Grenze dieses Quotienten — indem ω stätig abnimmt, folglich $\varphi(z+\omega)$ stätig abnimmt oder zunimmt, so dass die Differenz zwischen φz und $\varphi(z+\omega)$ kleiner als jede gegebene wird — ist φz . — Es fällt diese Betrachtung im Grunde mit der obigen zusammen, zufolge deren in $\varphi z \triangle z + \varphi(z+\triangle z) \triangle z + \dots + \varphi(z+\omega-\triangle z) \triangle z$ $\triangle z$ immer so klein bestimmt werden kann, dass die durch noch so weit fortgesetzte fernere Zerlegung der $\triangle z$ sich ergebende Vergrösserung oder Verminderung der Summe kleiner als jede gegebene ist.

In Bezug auf die vorhergehende Darstellung bleibt noch ein Punct zu berühren; es ist nämlich noch in Erwägung zu ziehen, welchen Einfluss es auf die Bedeutung von $\int_a^z \varphi x \partial x, = Fz$, haben müsse, wenn φx für einen der in Betracht kommenden Werthe von $x, = u$, unendlich würde. Substituiren wir für diesen Fall $u-\omega$ für x in φx , so ist zu untersuchen, ob die Grenze von $\varphi(u-\omega)\omega$, indem ω bis $= 0$ abnimmt, $=$ einer constanten Grösse, $= v$, $= \infty$ oder $= 0$ sei. Gesetzt sie sei $= v$, so ist klar, dass wir in

$$\varphi a \cdot \omega + \varphi(a+\omega) \omega \dots + \varphi(u-\omega) \omega,$$

ω so klein nehmen können, dass, bei weiterer Zerlegung der Differenzen von x in n aliquote Theile, die Grössen*) $\varphi(u - \frac{1}{n}\omega) \frac{\omega}{n}$, $\varphi(u - \frac{2}{n}\omega) \frac{\omega}{n} \dots$ einzeln beliebig wenig von v , folglich ihre Summe beliebig wenig von nv unterschieden, d. h. da n eine beliebig grosse Zahl bedeuten kann, $= \infty$ sei; es wird demnach in diesem Fall $\int_a^z \varphi x \partial x$ oder Fz für $z = u$ unendlich werden, oder eine Unterbrechung der Continuität erleiden. Zu demselben Ergebniss gelangt man natürlich, wenn die Grenze von $\varphi(u - \omega) \omega = \infty$ ist; in beiden Fällen wird es also unstatthaft, nach der unmittelbaren Bedeutung von $\int_a^z \varphi x \partial x$, die Integration über den Werth $z = u$ hinaus sich erstrecken zu lassen. Ist dagegen jene Grenze $= 0$, so folgt daraus, dass $\varphi(u - \omega)$, obwohl mit der Abnahme von ω gegen ω^0 oder Const., unendlich gross werdend, gegen ω^{-1} unendlich klein wird, und hieraus, dass dieselbe im Verhältniss zu $\omega^{-\alpha}$, wo α eine zwischen 0 und 1 liegende Grösse, einer zwischen 0 und ∞ liegenden Grenze e ständig sich annähern wird. Es wird demnach die Differenz ω immer so klein bestimmt werden können, dass die durch weitere Zerlegung derselben an die Stelle von $\varphi(u - \omega) \omega$ tretende Summe $\varphi(u - \omega) \frac{\omega}{n} + \dots + \varphi(u - \frac{1}{n}\omega) \frac{\omega}{n}$, weil zwischen $\varphi(u - \omega) \omega$ und $\varphi(u - \frac{1}{n}\omega) \omega$ liegend, von $\frac{\varphi(u - \omega)}{\omega^{-\alpha}} \cdot \omega^{1-\alpha}$ d. i. von $e \omega^{1-\alpha}$ beliebig wenig unterschieden, d. i. kleiner als jede gegebene Grösse gedacht werden kann. In diesem Falle also wird der Satz bestehen bleiben, dass in der Summe $\varphi a \cdot \omega + \dots + \varphi(u - \omega) \omega$ die ω so klein gedacht werden könne, dass die durch eine noch so weit fortgesetzte Zerlegung dieser Grösse hervorgebrachte Vergrösserung oder Verminderung der Summe

*) Es wird hier, wie in dem zunächst Folgenden, φx von $x = u - \omega$ bis $x = u$ als nur zunehmend oder nur abnehmend gedacht.

kleiner als jede gegebene Grösse sei; es wird folglich für sie ein Grenzwert bestehen, $\int_a^z \varphi x \partial x$ für $z = u$ nicht unendlich werden. Substituieren wir z. B. in $\frac{1}{(1-x)^2}$, $\frac{1}{1-x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $1 - \omega$ für x , so ergeben sich deren Grenzen, für abnehmende Werthe von ω , $= \infty$, $= \frac{1}{2}$, $= 0$, und hieraus wird also folgen $\int_0^1 \frac{\partial x}{(1-x)^2}$ und $\int_0^1 \frac{\partial x}{1-x^2} = \infty$, $\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} =$ einem endlichen Werthe. *)

*) Lagrange, leçons pg. 92, indem er den Satz (oder vielmehr einen ganz ähnlichen) vorträgt, dass eine Function von x mit der Vergrösserung von x so lange nur zunehmen oder nur abnehmen könne, als ihre derivirte nur positiv oder negativ sei, ein Satz, der sich an die oben gegebene Darstellung unmittelbar anschliesst, bemerkt: „Dans le calcul différentiel la conclusion précédente est une suite immédiate et nécessaire de la manière, dont ce calcul est envisagé, et elle se présente même sans aucune limitation relativement aux valeurs infinies; mais nous allons voir, qu'elle est souvent en défaut à cet égard, ce qui servira à montrer la nécessité d'une analyse plus rigoureuse que celle qui sert de base au calcul différentiel.“ Den Beleg zu der letztern Behauptung

gibt Lagrange durch die Function $\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a}$, die, für $x=0, =0$, für $x > a$ negativ ist, obwohl der Differential-Coefficient $= \frac{1}{(a-x)^2}$, also für alle Werthe von x positiv ist. Hiegegen ist zu bemerken, dass nach der ursprünglichen Ansicht vom Differential und der sich daran anschliessenden vom Integral — eine Ansicht, die wir in ihren Grundzügen oben festzuhalten versucht haben — von einer Integration, d. i. Summirung, über den Werth hinaus, bis zu dem die Summe $= \infty$ wird, offenbar nicht die Rede sein kann und wir also die obige Behauptung: „elle se présente sans aucune limitation etc.“ in Abrede stellen müssen; dass aber in dem angeführten Beispiel

$\int_0^a \frac{\partial x}{(a-x)^2}$ unendlich sein müsse, ist, wie oben gezeigt wurde, eine aus dem

Begriffe des Integrirens als eines Summirens selbst sich ergebende Folgerung, unabhängig von einer anderweitigen Kenntniss des Integrals. Jenseits $x=a$ tritt der zu Anfang angeführte Satz wieder in Gültigkeit, und der Differential-Coefficient zeigt auch hier ein Zunehmen an, weil die primitive Function beim Durchgang durch's Unendliche, wie oft, negativ geworden ist und in

VI.

Die auf den vorhergehenden Betrachtungen beruhende Gleichung

$$fz = fa + \int_a^z f' x \partial x = fa + \int_a^z \frac{\partial f x}{\partial x} \partial x$$

kann als die Fundamental-Gleichung des Infinitesimal-Calculs angesehen werden; die Taylorsche Reihe wird durch sie gleichsam von selbst hervorgetrieben, ist nur eine nothwendig sich darbietende Entwicklung derselben.

Um Wiederholungen zu vermeiden, mögen im Folgenden μ_1 , μ_2 und μ drei Werthe von x bezeichnen, für welche irgend eine Function dieser Grösse von $x = a$ bis $x = z$ beziehlich den kleinsten, grössten und einen gewissen zwischen ihnen liegenden Werth habe. Aus den Erörterungen des Abschnittes V. geht nun zunächst hervor

$$\int_a^z f' x \partial x > f' \mu_1 (z-a) \text{ und } < f' \mu_2 (z-a), \text{ oder} \\ fz = fa + f' \mu (z-a)$$

Die in der obigen Gleichung ausgesprochene Zerlegung aber auf $f' x$ selbst wieder angewendet giebt, wenn wir, nach Lagrange, die Differential-Coefficienten der Reihe nach mit $f' x$, $f'' x$, $f''' x \dots$ bezeichnen,

$$\int_a^z f' x \partial x = \int_a^z \left(f' a + \int_a^x f'' x \partial x \right) \partial x$$

der That von $-\infty$ bis $-\frac{1}{a}$ zunimmt, so dass die bestimmten Integrale

$\int_a^b \frac{\partial x}{(a-x)^2}$, $b > a$, sämmtlich positiv sind. — „Suivant le principe que nous venons d'établir, la valeur de y ne sera nécessairement positive qu'autant que la fonction dérivée $\frac{\partial y}{\partial x}$ ne sera pas infinie etc.“ Diese allgemeine Be-

schränkung ist aber gerade unnöthig, denn für den Fall, dass $\int \frac{\partial y}{\partial x} \partial x$, für $\frac{\partial y}{\partial x} = \infty$, nicht auch $= \infty$ wird, was wie oben gezeigt, wenn $\frac{\partial y}{\partial x}$ als Function von x gegeben ist, aus ihr allein sich erkennen lässt, muss der zu Anfang angeführte Satz nothwendig in Gültigkeit bleiben.

wo $\int_a^z \int_a^x f'' x \partial x^2$ aus dem allgemeinen Ausdruck des Incrementes alles absondert, was, indem z stätig bis zu dem Werthe $= a$ abnimmt, gegen $f' a (z-a)$ unendlich klein wird. Nun muss $\int_a^z f'' x \partial x$ für jeden Werth von x , von $x = a$ bis $x = z$, $> f'' \mu_1 (x-a)$ und $< f'' \mu_2 (x-a)$, folglich, ebenfalls nach V, $\int_a^z \int_a^x f'' x \partial x \partial x > f'' \mu_1 \frac{(z-a)^2}{2}$ und $< f'' \mu_2 \frac{(z-a)^2}{2}$ sein, oder es ist

$$fz = fa + f' a (z-a) + \int_a^z \int_a^x f'' x \partial x \partial x$$

$$= fa + f' a (z-a) + f'' \mu \frac{(z-a)^2}{1 \cdot 2}$$

Allgemein ergibt sich durch fortgesetzte Anwendung der zu Anfang aufgestellten Gleichung, indem wir die n malige Integration von a bis zu dem innerhalb dieser Integrationen selbst als veränderlich — von a bis z — gedachten Werth der Unabhängigen durch $\int_a^z$, den n ten Differential-Coefficienten von $f x$ durch $f^n x$ bezeichnen:

$$fz = fa + f' a (z-a) + f'' a \frac{(z-a)^2}{2} + f''' a \frac{(z-a)^3}{2 \cdot 3} + \dots +$$

$$\int_a^z \int_a^{x^{n-1}} f^n x \partial x^n, (A), \quad \text{oder da}$$

$\int_a^z f^n x \partial x > f^n \mu_1 (x-a)$ und $< f^n \mu_2 (x-a)$, oder $= f^n \mu (x-a)$, folglich

$$\int_a^z \int_a^{x^{n-1}} f^n x \partial x^n = \int_a^z \int_a^{x^{n-2}} f^n \mu (x-a) \partial x^{n-1}$$

$$= \int_a^z \int_a^{x^{n-3}} f^n \mu \frac{(x-a)^2}{2} \partial x^{n-2} = \int_a^z \int_a^{x^{n-4}} f^n \mu \frac{(x-a)^3}{2 \cdot 3} \partial x^{n-3}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$= \int_a^z f^n \mu \frac{(x-a)^{n-1}}{2 \cdot 3 \dots n-1} \partial x = f^n \mu \frac{(z-a)^n}{2 \cdot 3 \dots (n-1) n}$$

$$fz = fa + f' a (z-a) + f'' a \frac{(z-a)^2}{2 \cdot 3} + f''' a \frac{(z-a)^3}{2 \cdot 3} \dots + f^n \mu \frac{(z-a)^n}{2 \cdot 3 \dots (n-1) n}, (B)$$

Ist $z < a$, so ist die diese Reihe erzeugende Fundamental-Gleichung so zu fassen:

$$fz = fa - \int_z^a f' x \partial x$$

$$= fa - \int_z^a \left(f' a - \int_z^x f'' x \partial x \right) \partial x$$

d. h. man erhält, wie sogleich ersichtlich ist, dieselbe Entwicklung, wie in (B), nach Potenzen von $a - z$, nur mit dem Unterschiede, dass die Glieder abwechselnd positiv und negativ sind, d. h. die Entwicklung (B) ist mit Berücksichtigung der analytischen Regeln über die Vorzeichen für beide Fälle, $z > a$ und $z < a$, gültig. Dasselbe gilt für (A), in sofern die Bedeutung des Ausdrucks $\int_a^{a+b} \varphi x \partial x$ für den Fall, dass b negativ ist, so gefasst werden muss, dass in den Summen (V, A) und (V, B), oder in

$\varphi a \cdot \Delta x + \varphi(a + \Delta x) \Delta x + \varphi(a + 2\Delta x) \Delta x \dots + \varphi(a + (n-1)\Delta x) \Delta x$ die Differenz der veränderlichen Werthe von x , $= \Delta x$, subtractiv genommen werde, woraus sogleich $\int_a^z \varphi x \partial x = - \int_z^a \varphi x \partial x$ hervorgeht.

Setzt man in (A) und (B) $a = o$, so erhält man die Reihe von Mac-Laurin; setzen wir $z - a = \omega$, so geht (A) über in

$$f(a + \omega) = fa + f' a \cdot \omega + f'' a \frac{\omega^2}{2} + \dots + \int_o^\omega f^n(a + \omega) \partial \omega^n, \quad (C)$$

die Form, in welcher, abgesehen von dem letzten Gliede, diese Entwicklung zuerst von Taylor aufgestellt wurde. Wir haben hier in der Darstellung dieses letzten Gliedes der Einfachheit wegen mit ω sowohl die unabhängig Veränderliche selbst bezeichnet, deren Functionen in den $n - 1$ ersten Integrationen von $\omega = o$ bis zu einem unbestimmten veränderlichen Werthe derselben, der innerhalb der Grenzen des letzten Integrals liegt, integrirt werden sollen, als auch die zunächst bestimmte Grenze des letzten Integrals selbst, von deren Veränderlichkeit wenigstens zunächst abstrahirt werden kann. Derselben Bezeichnungs-Weise uns bedienend würden wir unmittelbar in Bezug auf die Entwicklung (C) die zu Anfang aufgestellte Gleichung auch so fassen können

$$\begin{aligned} f(a + \omega) &= fa + \int_o^\omega f'(a + \omega) \partial \omega \\ &= fa + \int_o^\omega \left(f' a + \int_o^\omega f''(a + \omega) \partial \omega \right) \partial \omega, \text{ u. s. w. } \end{aligned}$$

und nach derselben Schlussweise, die der Entwicklung (B) zu Grunde liegt, wird der Werth des ergänzenden Gliedes der Entwicklung (C) enthalten sein müssen zwischen $f^n \mu_1 \frac{\omega^n}{1.2\dots n}$ und $f^n \mu_2 \frac{\omega^n}{1\dots n}$, wenn $f^n \mu_1$ und $f^n \mu_2$ den kleinsten und grössten Werth angeben, den $\frac{\partial^n f x}{\partial x^n} = f^n x$, in dem Intervall $x=a$ bis $x=a+\omega$ annehmen kann. Durch diese Bestimmung, die man bekanntlich Lagrange verdankt, wird das Taylorsche Theorem erst vollständig, da man an ihr ein Kriterium der Convergenz der Reihe besitzt, und ohne ein solches eine als Darstellung einer Grösse aufgestellte Reihe ihre Bedeutung verliert; zugleich ergibt sich aus ihr, dass, indem ω stätig abnimmt, die Ergänzung des Incrementes $f(a+\omega) - fa$ im Verhältniss zu dem letzten der von ihr abgesonderten Gliede der Reihe (C), nämlich $\int_0^\omega f^n(a+\omega) \partial \omega^n : f^{n-1} a \frac{\omega^{n-1}}{1.2\dots n-1}$, kleiner als jede gegebene Grösse werden müsse, wie denn in der That das obige Verfahren bei Entwicklung der Reihen (A) oder (C) ganz darauf beruht, dass aus dem Incremente der abhängigen Grösse oder seiner Ergänzung successiv diejenige Bestimmung abgesondert werde, gegen welche bei stätiger Abnahme des Incrementes der unabhängigen Grösse der Rest unendlich klein wird.*)

*) Die Entwicklung der Taylorschen Reihe aus der zu Anfang dieses Abschnittes aufgestellten Gleichung findet sich zuerst bei d'Alembert: *Recherches sur différens points importants du système du monde*, pg. 50. „Soit $\varphi(z)$ une fonction de la variable z , $dz \Delta(z)$ la différence de cette fonction; $dz \Gamma(z)$ la différence de $\Delta z \dots$ Soit $\varphi(z+\zeta) = \varphi(z)+u$; différentions cette équation en regardant z comme constante, ce qui nous est permis et en traitant u et ζ comme variables, nous aurons $d\zeta \Delta(z+\zeta) = du$ et $u = \int d\zeta \Delta(z+\zeta)$; donc $\varphi(z+\zeta) = \varphi z + \int d\zeta \Delta(z+\zeta)$: par la même raisons nous trouverons $\Delta(z+\zeta) = \Delta z + \int d\zeta \Gamma(z+\zeta) \dots$ donc substituant ces valeurs nous aurons

Die Entwicklungen (A), (B), (C) sind unbedingt gültig, es sei denn, dass die in ihnen enthaltenen oder zur Anwendung gekommenen Differential-Coefficienten, für $x=a$ oder in dem Intervall $x=a$ bis $x=z$ ($=a+\omega$) unendlich würden. Die noch übrig bleibende Erörterung dieser beiden Punkte schliesst sich an die von uns aufgestellte Fundamental-Gleichung dieser Entwicklungen eben so ungezwungen an, wie diese überhaupt aus ihr hervorgegangen sind. Betrachten wir zunächst den letztern, so kann, wenn, für $x=u$, $f'x$ und mit ihr $\int_a^u f'x \partial x$ eine Unterbrechung der Continuität erleidet, von einer Integration, nach ihrem unmittelbaren Begriffe selbst, über den Werth $x=u$ hinaus nicht die Rede sein, wie schon in dem vorhergehenden Abschnitt bemerkt ist,*) wo zugleich gezeigt wurde, wie aus der Beschaffenheit von $f'x$ erkennbar sei, ob $\int_a^u f'x \partial x$ zugleich mit ihr unendlich werde oder nicht. Ist das Erstere der Fall, so verliert die Entwicklung (A), wie die Gleichung, worauf sie gebaut ist, wenn $z > u$, ihre Gültigkeit oder ihre Bedeutung; es muss dieses jedoch an dem Ausdruck $\int_a^z \int_a^z f^n x \partial x^n$

$\varphi(z+\zeta) = \varphi z + \int d\zeta \Delta z + \int d\zeta \int d\zeta \Gamma z + \dots$ Nur wird auf diese Weise die nothwendige Convergenz der Reihe $\varphi z + \zeta \Delta z + \frac{\zeta^2 \Gamma z}{2} + \dots$ („ ζ étant une très petite quantité“) nicht klar.

*) Das dort Gesagte würde sich kurz so fassen lassen, dass $\int_a^u \varphi x \partial x$, für $x=u$, unendlich werde oder nicht, je nachdem φu ein Unendlich-Grosses der Ordnung 1 oder darüber, oder einer niedrigeren Ordnung sei, indem diese Ordnung ausgedrückt wird durch den Exponenten y der Potenz ω^{-y} , gegen welche $\varphi(u-\omega)$, wenn ω bis 0 abnimmt, in einem endlichern Verhältnisse bleibt, so dass $\frac{\varphi(u-\omega)}{\omega^{-y}}$ sich einem bestimmten Grenzwerthe annähert, oder kurz, für $\omega=0$ einen bestimmten Werth hat.

erkennbar sein, da er bis $x = u$ immer die vollständige Ergänzung der Reihe giebt, also auch für $x = u$, wie $fz, = \infty$ werden muss. So ist

z. B., wenn $fx = \frac{1}{a-x}$, nach (C)

$$f(x+\omega) = \frac{1}{a-x} + \frac{1}{(a-x)^2} \omega + \frac{1}{(a-x)^3} \omega^2 + \frac{1}{(a-x)^4} \omega^3 + \dots$$

ein, wenn $x < a$ und ω positiv ist, durchaus positiver Werth, obwohl der Werth von $\frac{1}{a-(x+\omega)}$, wenn $\omega > a-x$, wie klein auch ω sei, negativ ist.

In der That können in der Ergänzung $\int_0 \frac{2.3.4}{a-(x+\omega)^5} \partial \omega^4$ die Integrale über $\omega = a-x$ hinaus nicht sich erstrecken, da, wenn wir zunächst bei dem ersteren $\int_0 \frac{2.3.4}{a-(x+\omega)^5} \partial \omega$ stehen bleiben, dieses, wie sogleich erkennbar, eben so aber auch alle folgenden, für $\omega = x-a$, $= \infty$ wird. Wenn $fx = (a-x)^{\frac{8}{3}}$, also

$$f(x+\omega) = (a-x)^{\frac{8}{3}} - \frac{8(a-x)^{\frac{5}{3}}}{3} \omega + \frac{40(a-x)^{\frac{2}{3}}}{9} \frac{\omega^2}{2} - \int_0 \frac{80(a-(x+\omega))^{-\frac{1}{3}}}{27} \partial \omega^3$$

so kann hier freilich die ergänzende Integration auch noch über $\omega = a-x$ hinaus sich erstrecken, da das Integral, für $\omega = a-x$, nicht $= \infty$ wird, die oben gegebene Bestimmung aber über die Grenzen, zwischen denen dasselbe eingeschlossen ist, würde hier völlig nichtssagend werden, da der grösste und kleinste Werth von $a-(x+\omega)^{-\frac{1}{3}}$ — oben $f''' \mu_2$ und $f''' \mu_1$ — hier $= +\infty$ und $= -\infty$ sein würde. Die weitere Fortführung der Entwicklung unter der Annahme $\omega > a-x$ wäre ganz bedeutungslos und unstatthaft, da die Integrale, aus denen successive die folgenden Glieder der Reihe abgesondert werden, für $\omega = a-x$, $= \infty$ werden, folglich über diesen Werth von ω hinaus nicht sich erstrecken können.

In der That ergäbe sich aus einer solchen Entwicklung

$$(a-(x+\omega))^{\frac{2}{3}} - (a-x)^{\frac{2}{3}} = -\frac{2(a-x)^{-\frac{1}{3}}}{3} \omega - \frac{2(a-x)^{-\frac{4}{3}}}{9} \cdot \frac{\omega^2}{2} - \frac{8(a-x)^{-\frac{7}{3}}}{27} \frac{\omega^3}{2.3} -$$

der Werth dieser Reihe ist, wenn $a > x$, durchaus negativ, obwohl, wie

klein auch die ω genommen werde, wenn sie nur $> a - x$ ist, der Werth von $(a - (x + \omega))^{\frac{2}{3}} - (a - x)^{\frac{2}{3}}$ positiv sein muss.

Es darf demnach, wenn in (A) $f^n x \left(\frac{\partial^n f x}{\partial x^n} \right)$, für $x = u, = \infty$ wird, und $u > a, < z$ ist, die Entwicklung von fz nach Potenzen von $z - a$ nicht über $\dots f^{n-1} a \frac{(z-a)^{n-1}}{1 \dots n-1} \dots$ fortgeführt werden, wenn der folgende Theil der Entwicklung den ihm sonst, von einem gewissen Werthe der Differenz $z - a$ bis $z - a = 0$, nothwendig zukommenden Character der Convergenz, d. h. seine Bedeutung, nicht verlieren soll.

Was nun den Fall betrifft, dass $f^n a$ selbst unendlich wird, so wollen wir seine weitere Erörterung an eine Betrachtung anknüpfen, die uns zugleich den Weg zeigen wird, dem Taylorschen Theorem eine noch grössere formelle Ausdehnung zu geben.

VII.

Es sei $f' x = \psi x \cdot \varphi' x$, es sei ferner $\psi \mu_1$ der kleinste, $\psi \mu_2$ der grösste, $\psi \mu$ ein gewisser mittlerer Werth, den ψx in dem Intervall $x = a$ bis $x = z$, ohne unendlich zu werden, annimmt.

Da nun $\int_a^z f' x \partial x =$ der Grösse, welcher sich die Summe $(\psi a \cdot \varphi' a + \psi(a + \Delta x) \varphi'(a + \Delta x) + \dots + \psi(z - \Delta x) \varphi'(z - \Delta x)) \Delta x$, (E) indem Δx bis $= 0$ abnimmt, beliebig annähert, diese Summe aber, wenn $\varphi' x$ von $x = a$ bis $x = z$ das Vorzeichen nicht verändert, stets durch Substitution von $\psi \mu_1$ für ψx kleiner, durch Substitution von $\psi \mu_2$ für x grösser werden muss, so ergibt sich,*) dass, unter der

*) Was nämlich von der veränderlichen Summe (E), oder von den obigen (S. 27) ihr zu Grunde liegenden, gültig ist, unabhängig von der Grösse von Δx , gilt nothwendig auch von ihrer Grenze oder der Summe ihrer Grenzen (S. 29),

oder id. i. von $\int_a^z f' x \partial x$.

eben aufgestellten Bedingung $\int_a^z f' x \partial x$ oder $fz - fa > \psi_1 \mu (\varphi z - \varphi a)$ und $< \psi_2 \mu (\varphi z - \varphi a)$ sein müsse. Die erwähnte Bedingung darf nicht weggelassen werden, weil die Glieder der Summe $\varphi' a \cdot \Delta x + \dots + \varphi' (z - \Delta x) \Delta x$, die bei einem Zeichen-Wechsel von $\varphi' x$ einander aufheben, auch mit einem constanten Factor multiplicirt einander aufheben werden, was im Allgemeinen der Fall nicht sein wird, wenn der Factor veränderlich ist.

So z. B. ist $\log(1 + \omega) = \int_0^\omega \frac{\partial \omega}{1 + \omega} = \int_0^\omega \frac{1}{\sqrt[n]{1 + \omega}} (1 + \omega)^{\frac{1-n}{n}} \partial \omega$, und, da $\int_0^\omega (1 + \omega)^{\frac{1-n}{n}} \partial \omega = n \left(\sqrt[n]{1 + \omega} - 1 \right)$, so liegt $\log(1 + \omega)$ zwischen $n \left(\sqrt[n]{1 + \omega} - 1 \right)$ und $\frac{n}{\sqrt[n]{1 + \omega}} \left(\sqrt[n]{1 + \omega} - 1 \right)$, welche Grenzen durch Vergrößerung von n einander beliebig nahe gebracht werden können, da durch sie der Unterschied von 1 und $\frac{1}{\sqrt[n]{1 + \omega}}$, im Verhältniss zu diesen Grössen selbst, beliebig klein gemacht werden kann. Setzt man $n = \infty$, so ist $1 = \frac{1}{\sqrt[n]{1 + \omega}}$, es fallen die beiden Grenzen zusammen; in der That giebt unter dieser Annahme $n \left(\sqrt[n]{1 + \omega} - 1 \right)$, nach dem Binomial-Theorem entwickelt, die bekannte Reihe für $\log(1 + \omega)$.

Wir wählen als zweites Beispiel die Erläuterung eines oben (S. 19) von uns erwähnten Integrals. Es sei $\varphi' x = \sin nx$; hier wird nun $\varphi' x$ zwischen $x = \frac{m}{n} \pi$ und $x = \frac{m+2}{n} \pi$, (m und $n =$ ganzen Zahlen) zwar sein Zeichen wechseln, da aber die Glieder der Summe $\sin(m\pi + n\Delta x) \Delta x + \sin(m\pi + 2n\Delta x) \Delta x + \dots$ den Gliedern $\sin((m+1)\pi + n\Delta x) \Delta x + \sin((m+1)\pi + 2n\Delta x) \Delta x + \dots$, abgesehen vom entgegengesetzten Vorzeichen, beziehlich gleich sind, so ergibt sich sogleich, dass, wenn ψx von $x = a$ bis $x = z$ nur positiv und

zunehmend ist, die Summirung der Glieder in (E) bis zu $x = \frac{m+1}{n} \pi$ und von da bis $x = \frac{m+2}{n} \pi$ abwechselnd ein positives und negatives Resultat geben, folglich, abgesehen vom Vorzeichen, $\int_a^z \psi x \sin nx \partial x < \frac{2}{n} \psi z$ sein müsse, da $\int \sin nx \partial x$, von $x = \frac{m+1}{n} \pi$ bis $x = \frac{m+2}{n} \pi$, abgesehen vom Zeichen, $= \frac{2}{n}$ ist. Ist ψx von $x = a$ bis $x = z$ zwar positiv, aber abnehmend, so ergibt sich ganz auf dieselbe Weise, wenn man sich in diesem Falle die Summirung vom letzten Gliede in (E) beginnend denkt, das Integral $< \frac{2}{n} \psi a$. Ist ψx in dem Intervall $x = a$ bis $x = z$ negativ, aber ebenfalls nur abnehmend oder zunehmend, so kann diese Annahme auf das Resultat $\int_a^z \psi x \sin nx \partial x < \frac{2}{n} \psi z$ oder $< \frac{2}{n} \psi a$ keinen Einfluss haben, da bei demselben vom Zeichen abgesehen werden soll. Demnach wird denn auch, wenn die Function ψx für $x = u, = y \dots$ ihr Zeichen wechselt, ein Maximum oder Minimum hat, ohne dass sie jedoch in dem Intervall $x = a$ bis $x = z$ unendlich wird, $\int_a^u \psi x \sin nx \partial x$, $\int_u^y \psi x \sin nx \partial x$, ..., folglich wie jeder dieser Theile, so auch das ganze Integral $\int_a^z \psi x \sin nx \partial x$, durch Vergrößerung der Zahl n beliebig klein, abgesehen vom Zeichen, gemacht werden können. Nun ist aber

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{1}{2}x}, *)$$

folglich, wenn man auf beiden Seiten, mit ∂x multiplicirend, das Integral von $x = 0$ bis $x = \pi$ nimmt

$$\frac{1}{2} \pi = \int_0^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{1}{2}x} \partial x + \int_{\pi}^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{1}{2}x} \partial x$$

*) Man übersieht sogleich die Richtigkeit dieser Gleichung, wenn man, auf beiden Seiten mit $2 \sin \frac{1}{2}x$ multiplicirend, darauf achtet, dass $\sin(n - \frac{1}{2})x + 2 \sin \frac{1}{2}x \cos nx = \sin(n + \frac{1}{2})x$ ist.

Es ist aber nach dem Vorhergehenden das Integral zwischen den Grenzen $x = \alpha$ und $x = \pi$, wenn $n = \infty$, $= 0$, da $\frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} x}$ in diesem Intervall endlich bleibt, folglich $\int_{\alpha}^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{1}{2} x} \partial x = \frac{1}{2} \pi$, wo $n = \infty$ und α eine Grösse, die beliebig klein gedacht werden kann (S. S. 19). Es scheint uns dieses das einfachste und sehr einfache Verfahren zur Bestimmung dieses wichtigen Integrals.*)

Da, wie sogleich ferner sich ergibt, $\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{1}{2} x} \partial x = \pi$, folglich, $x - y$ für x substituirt, $\int_{-\pi}^{+\pi} \psi x \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(x - y)}{2 \sin \frac{1}{2}(x - y)} \partial x$, wenn $y < \pi$ und $> -\pi$, $= \int_{y-\alpha}^{y+\alpha} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(x - y)}{2 \sin \frac{1}{2}(x - y)} \psi x \partial x$
 $= \pi \psi y$, (da α beliebig klein gedacht werden kann), so erhält man

$$\psi y = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos(x - y) + \cos 2(x - y) \dots + \cos k(x - y) + \dots \text{in inf.} \right) \psi x \partial x,$$

oder

$$\psi y = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{2} \psi x \partial x + \cos y \int_{-\pi}^{+\pi} \cos x \psi x \partial x + \cos 2y \int_{-\pi}^{+\pi} \cos 2x \psi x \partial x + \dots \right. \\ \left. + \sin y \int_{-\pi}^{+\pi} \sin x \psi x \partial x + \sin 2y \int_{-\pi}^{+\pi} \sin 2x \psi x \partial x + \dots \right)$$

die berühmte Entwicklung, die zuerst von Fourier in der *théorie de la*

*) Grunert in den Suppl. zu Klügels Wörterb. Th. 1, S. 239sq. giebt, ebenfalls zum Behuf der Ableitung der Fourierschen Entwicklung, ein sehr weitläufiges Verfahren zur Bestimmung des Integrals $\int_g^h \frac{\sin i \beta}{\sin \beta} f \beta \partial \beta$ für wachsende i , durch welches er S. 248 zu dem Schluss kommt, dass, wenn in $\int_g^h \frac{\sin i \beta}{\sin \beta} f(\beta) \partial \beta$ $h =$ oder $< \frac{1}{2} \pi$, $f \beta$ zwischen den Grenzen des Integrals stätig ist, die Grenze desselben, wenn i wächst, fortwährend $= 0$, und nur in dem Falle, dass g selbst $= 0$, $= \frac{1}{2} \pi f(0)$ ist. — Fourier geht bei der Bestimmung der Coefficienten seiner Entwicklung von der Annahme ihrer Möglichkeit der Form nach — als Entwicklung der Functionen nach den Sinus und Cosinus des Vielfachen der unabhängigen Grösse — aus. Vgl. über diesen Punct, der in Bezug auf die Taylorsche Reihe bereits von uns besprochen ist, einen die Fourierschen Entwicklungen betreffenden Aufsatz von Dirksen in den Abhandlungen der Berliner Academie 1827.

chaleur aufgestellt wurde. Eine weiter eingehende Erörterung dieser, so wie der mit ihr verwandten Entwicklungen, obwohl mit Leichtigkeit an die oben ihnen zu Grunde gelegte Auffassung sich anschliessend, muss hier übergangen werden. Man sieht jedoch sogleich, dass statt der Integrations-Grenzen π und $-\pi$ auch zwei andere gewählt werden können, nur darf innerhalb ihrer $\sin \frac{1}{2} (x-y)$, ausser für $x=y$, nicht $=0$, wie ψx nicht $=\infty$ werden.

Wollte man z. B. in der obigen Reihe für y einen Werth $< -\pi$ oder $> +\pi$, etwa zwischen π und 2π , setzen, so würde in $\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin (n+\frac{1}{2}) (x-y)}{2 \sin \frac{1}{2} (x-y)} \psi x \partial x$, $\sin \frac{1}{2} (x-y)$ bei $x=y-2\pi$, und zwar nur bei diesem Werthe von x , durch 0 , oder $\frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} (x-y)}$ durch ∞ , hindurchgehen, folglich müsste der Werth der Reihe $=\psi (y-2\pi)$ gesetzt werden; setzt man $y=+\pi$, so erreicht $\sin \frac{1}{2} (x-y)$ für $x=-\pi$, wie für $x=+\pi$, den Werth $=0$, ohne jedoch, in Folge der Grenzen der Integration, durch ihn hindurchzugehen, und es würde demnach in diesem Falle der Werth des eben vorher angeführten Integrals $=\frac{1}{2}\pi \psi(-\pi) + \frac{1}{2}\pi \psi(\pi)$, oder die Summe der obigen Reihe $=\frac{1}{2}(\psi(-\pi) + \psi(\pi))$ sein. Auf ähnliche Weise wird man überall ohne Schwierigkeit aus der von uns gegebenen Ableitung der Summe dieser Reihe beurtheilen, ob der vorhin für sie gefundene Werth, $=\psi y$, eine Veränderung erleiden werde, und welche, wenn die vorhin festgestellten Grenzen der Integration oder auch der für y zu setzenden Werthe, nämlich $-\pi$ und $+\pi$, verändert werden. Wir bemerken nur noch, dass, wenn oben $\frac{\pi x}{m}$ an die Stelle von x gesetzt wird, also

$$\frac{1}{2} \partial x + \cos \frac{\pi x}{m} \partial x + \cos 2 \frac{\pi x}{m} \partial x + \dots + \cos n \frac{\pi x}{m} \partial x = \frac{\sin (n+\frac{1}{2}) \frac{\pi x}{m}}{2 \sin \frac{\pi x}{2m}} \partial x$$

hieraus, wenn von $x=-m$ bis $x=+m$ integrirt wird, sogleich sich ergibt

$$\int_{-m}^{+m} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{m}}{2 \sin \frac{\pi x}{2m}} \partial x = m, = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{m}}{2 \sin \frac{\pi x}{2m}}$$

wo α beliebig klein, wenn $n = \infty$, nach derselben Schlussweise, wie oben; folglich, da die Function ψx , wenn sie für die in Betracht kommenden Werthe von x , wie vorausgesetzt wird, keine Unterbrechung der Continuität erleidet, in dem beliebig klein zu denkenden Intervall $x = -\alpha$ bis $x = \alpha$, $= \psi(o)$ zu setzen ist, ($x-y$ für x substituirt),

$$\int_{-m}^{+m} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{m}(x-y)}{2 \sin \frac{\pi}{2m}(x-y)} \psi x \partial x = \int_{y-\alpha}^{y+\alpha} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{m}(x-y)}{2 \sin \frac{\pi}{2m}(x-y)} \psi x \partial x = m \psi y$$

$$= \int_{-m}^{+m} \left(\frac{1}{2} + \cos \frac{\pi}{m}(x-y) + \cos \frac{2\pi}{m}(x-y) \dots + \cos \frac{k\pi}{m}(x-y) + \text{in inf.} \right) \psi x \partial x$$

die allgemeinere Form der obigen Entwicklung, für welche aus demselben Grunde, wie dort, $\sin \frac{\pi}{2m}(x-y) = 0$ nur für $x=y$ werden darf, also $y > -m$ und $< +m$ sein muss; setzt man y kleiner oder grösser, so verändert sich die Summe der Reihe, wird aber nach den eben vorher gegebenen Andeutungen ohne Schwierigkeit gefunden werden; für $y = \pm m$ ist sie $\frac{1}{2} m (\psi(-m) + \psi m)$.

VIII.

Wir kehren nach dieser kurzen Abschweifung zurück zur Anwendung des im Anfang des vorhergehenden Abschnittes aufgestellten Satzes auf die Taylorsche Reihe, und zwar zunächst für den Fall, dass die Differential-Coefficienten in den Entwicklungen (VI, A, B, C), für $x=a, = \infty$ werden. Es ist in (IV) gezeigt worden, dass dieser Fall nur für specielle Werthe von x eintreten könne, da, wenn $f x$, auch $f' x$, also auch $f'' x \dots f^{n-1} x$, wenn überhaupt, im Allgemeinen continuirlich sich ändern müsse, womit die Annahme, dass $f^n x$ durchweg $= \infty$ sei, im Widerspruch stehe. Es ist ferner in (V) dargethan, dass

wenn, für $\omega = o$, $f'(a + \omega) = \infty$, $(f'(a + \omega) : \omega^{-\alpha}) =$ einer endlichen Grösse $= g$ sei, dann, je nachdem $\alpha < 1$ oder ≥ 1 , $fa =$ einer endlichen Grösse oder $= \infty$ sein werde. Da im letztern Falle von einer Entwicklung des Incrementes $f(a + \omega) - fa$ nicht die Rede sein kann, so liege α zwischen o und 1 ; dann ist

$$f(a + e) - fa = \int_o^e \frac{f'(a + \omega)}{\omega^{-\alpha}} \omega^{-\alpha} \partial \omega = \frac{Me^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

wenn M einen gewissen mittlern Werth bezeichnet zwischen dem grössten und kleinsten, den $(f'(a + \omega) : \omega^{-\alpha})$ von $\omega = o$ bis $\omega = e$ annimmt, d. n. $\omega^{-\alpha}$ durch Veränderung der Grösse von ω sein Zeichen nicht wechselt, (VIII). Führen wir die Entwicklung in derselben Weise fort, wie in VI, so erhalten wir

$$f(a + e) - fa = \int_o^e \left(g + \int_o \left(\frac{f'(a + \omega)}{\omega^{-\alpha}} \right)' \partial \omega \right) \omega^{-\alpha} \partial \omega, \text{ u. s. w.}$$

oder, wenn wir $(f'(a + \omega) : \omega^{-\alpha})$ durch $\varphi \omega$ bezeichnen, μ in der mehrerwähnten Bedeutung nehmen,

$$f(a + e) - fa = \varphi(o) \frac{e^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \varphi'(o) \frac{e^{2-\alpha}}{2-\alpha} + \varphi''(o) \frac{e^{3-\alpha}}{1.2.(3-\alpha)} + \dots + \varphi^n \mu \frac{e^{n-\alpha}}{1.2.n-1...n-\alpha}$$

Sobald $f^n(a + \omega)$ die erste der derivirten Functionen von $f'(a + \omega)$ ist, die, für $\omega = o$, $= \infty$ wird, so muss sie gegen $\omega^{-\alpha}$ (α zwischen o und 1) in einem endlichen Verhältniss bleiben, nach V, weil $f^{n-1}(a + \omega)$ für $\omega = o$, nach der Annahme, $=$ einer endlichen Grösse ist, und es wäre demnach das Ergänzungsglied in (VI, C)

$$\int_o^n f^n(a + \omega) \partial \omega^n = \int_o^{n-1} \left(\int_o \frac{f^n(a + \omega)}{\omega^{-\alpha}} \omega^{-\alpha} \partial \omega \right) \partial \omega^{n-1} = M \frac{\omega^{n-\alpha}}{(1-\alpha).(2-\alpha)...(n-\alpha)}$$

wenn M einen gewissen mittlern Werth bezeichnet zwischen dem grössten und kleinsten, den $\frac{f^n(a + \omega)}{\omega^{-\alpha}}$ von $\omega = o$ bis zu der andern Grenze der Integration annimmt. Hat M in Bezug auf $\left(\frac{f^n(a + \omega)}{\omega^{-\alpha}} \right)'$ dieselbe Bedeutung und $\frac{f^n(a + \omega)}{\omega^{-\alpha}}$ für $\omega = o$ den Werth g , so ist

$$\int_0^n \frac{f^n(a+\omega)}{\omega-\alpha} \omega-\alpha \partial \omega^n = \int_0^n \left(g + \int_0^1 \left(\frac{f^n(a+\omega)}{\omega-\alpha} \right)' \partial \omega \right) \omega-\alpha \partial \omega^n$$

$$= g \frac{\omega^{n-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)} + M \frac{\omega^{n+1-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)\dots(n+1-\alpha)}, \text{ u. s. w. } f.$$

Sollte eine der derivirten Functionen von $\frac{f^n(a+\omega)}{\omega-\alpha}$ abermals, für $\omega=0$, $=\infty$ werden, so ist, wie vorhin, auf dem Grunde der in V. gegebenen Auseinandersetzung zu schliessen, dass dieselbe (weil ihre primitive Function, die zunächst vorhergehende derivirte, für $\omega=0$ einen endlichen Werth hat) gegen $\omega^{-\beta}$, $\beta < 1$, für $\omega=0$ in einem endlichen Verhältnisse bleiben müsse, und es würde die, durch eine der vorhergehenden ganz analoge Operation, nach Potenzen von ω fortgeführte Entwicklung die Potenzen $\omega^{n+r-\alpha-\beta}$ u. s. w. ergeben. Als allgemeines Resultat stellt sich demnach Folgendes heraus. Wenn die erste der derivirten Functionen von $f(a+\omega)$, $f'(a+\omega)$ oder $\frac{\partial f(a+\omega)}{\partial \omega}$, für $\omega=0$ einen endlichen Werth hat oder gegen $\omega-\alpha$, α zwischen 0 und 1, in einem endlichen Verhältnisse bleibt, so kann der Umstand, dass eine der derivirten Functionen von $f'(a+\omega)$, $f^n(a+\omega)$ oder $\frac{\partial^n f(a+\omega)}{\partial \omega^n}$, $=\infty$ für $\omega=0$ wird, nie die Bedeutung haben,*) dass $f(a+\omega) - fa$ oder $fa = \infty$ sei; es muss vielmehr aus diesem Umstand der Schluss gezogen werden, dass die bis zu ω^{n-1} in Potenzen von ω mit ganzen Exponenten fortgeführte Entwicklung von $f(a+\omega) - fa$ von da an nur mit gebrochenen, jedoch gleichfalls steigenden, Exponenten, deren erster zwischen $n-1$ und n

*) Grüson giebt bei Gelegenheit der S. 6 angezogenen Aeusserung als Beleg die Entwicklung von $\left(\sin(x+\omega) \right)^{\frac{1}{3}} = \sin x + \frac{\omega \cos x}{3 \sin x^{\frac{2}{3}}} + \dots$, d. i. für $x=0$, $(\sin \omega)^{\frac{1}{3}} = \infty$; nach der obigen Darstellung dagegen: $= \int_0^{\omega} \frac{\omega^{\frac{2}{3}} \cos \omega}{3 \sin \omega^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{\partial \omega}{\omega^{\frac{2}{3}}} = \omega^{\frac{1}{3}} + \int_0^{\omega} \text{etc.} -$

liegt, weiter geführt werden könne; die wesentliche Eigenschaft der Entwicklung, dass der Rest der Ergänzung zu dem letzten der abgesonderten Glieder der Reihe, wenn ω stetig abnimmt, unendlich klein wird, bleibt hiebei unverändert. Wir beschliessen die Betrachtung dieses Falles, der gewöhnlich als ein dem Princip der Taylorschen Entwicklung entzogener*) behandelt wird, mit der einfachen dem Obigen entsprechenden Entwicklung des Incrementes der Function $\log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ für $x=1$, deren derivirte, $= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, für diesen Werth von x unendlich wird; hier ist, $1 + \omega$ für x substituirt, $\alpha = \frac{1}{2}$, $f'(1 + \omega) : \omega^{-\alpha} = (2\omega + \omega^2)^{-\frac{1}{2}} : \omega^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2 + \omega}}$, demnach

$$\begin{aligned} f(1 + \omega) - f(1) &= \int_0^{\omega} \frac{1}{\sqrt{2 + \omega}} \frac{\partial \omega}{\omega^{\frac{1}{2}}} = \int_0^{\omega} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \int_0^{\omega} \frac{\partial \omega}{2(2 + \omega)^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{\partial \omega}{\omega^{\frac{1}{2}}} \\ &= \sqrt{2} \cdot \omega^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3} \omega^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}} \cdot 5} \omega^{\frac{5}{2}} - \int_0^{\omega} \left(\int_0^{\omega} \frac{15 \partial \omega^3}{8(2 + \omega)^{\frac{7}{2}}} \right) \frac{\partial \omega}{\omega^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Bezeichnen wir, den grössten und kleinsten Werth, den $\frac{15}{8(2 + \omega)^{\frac{7}{2}}}$ innerhalb der Grenzen der Integration annimmt, durch M_2 und M_1 , so liegt die Ergänzung der bis zu $\omega^{\frac{5}{2}}$ fortgeführten Reihe zwischen $-M_2 \frac{\omega^{\frac{7}{2}}}{3.7}$ und $-M_1 \frac{\omega^{\frac{7}{2}}}{3.7}$.

IX.

Es führt uns aber der der vorhergehenden Erörterung zu Grunde liegende, in (VII.) ausgesprochene Satz, in allgemeinerer Anwendung zu der folgenden Auffassung der in (VI.) als Grundlage der Taylorschen Entwicklung aufgestellten Gleichung, nämlich

*) Lagrange giebt (Leçons p. 74) die Vorschrift, in diesem Falle auf die primitive Function zurückzugehen und $f(x + \omega)$ zu entwickeln „par les règles connues.“

$$f(a+\omega) = fa + \int_0^{\omega} \frac{f'(a+\omega)}{\varphi' \omega} \varphi' \omega \partial \omega = fa + \frac{f'(a+\mu)}{\varphi' \mu} (\varphi \omega - \varphi(o))$$

wenn μ den Werth von x bezeichnet, hier wie in dem Folgenden, für welchen der ganze Ausdruck $\frac{f'(a+x)}{\varphi' x}$ (nicht etwa die einzelnen ihn bildenden Grössen $f'(a+x)$ und $\varphi' x$) einen gewissen mittlern Werth hat zwischen dem grössten und kleinsten, den $\frac{f'(a+x)}{\varphi' x}$ von $x=o$ bis $x=\omega$ annimmt, — und $\varphi' x$ in dem Intervall $x=o$ bis $x=\omega$ das Vorzeichen nicht verändert. Entwickeln wir diese Gleichung, wie in VI, nach dem in ihr selbst ausgesprochenen Gedanken weiter, so erhalten wir (F')

$$\begin{aligned} f(a+\omega) &= fa + \int_0^{\omega} \left(\frac{f' a}{\varphi'(o)} + \int_0^{\omega} \frac{f''(a+\omega) \varphi' \omega - f'(a+\omega) \varphi'' \omega}{(\varphi' \omega)^3} \varphi' \omega \partial \omega \right) \varphi' \omega \partial \omega^*) \\ &= fa + \frac{f' a}{\varphi'(o)} (\varphi \omega - \varphi(o)) + \frac{f''(a+\mu) \varphi' \mu - f'(a+\mu) \varphi'' \mu}{(\varphi' \mu)^3} \frac{(\varphi \omega - \varphi(o))^2}{1.2} \\ &= fa + \frac{f' a}{\varphi' a} (\varphi \omega - \varphi(o)) + \frac{f'' a \varphi'(o) - f' a \varphi''(o)}{(\varphi'(o))^3} \frac{(\varphi \omega - \varphi(o))^2}{1.2} \\ &\quad + \int_0^{\omega} \left(\int_0^{\omega} \left(\int_0^{\omega} Q \varphi' \omega \partial \omega \right) \varphi' \omega \partial \omega \right) \varphi' \omega \partial \omega, \quad Q = \frac{1}{\varphi' \omega} \left(\frac{f''(a+\omega) \varphi' \omega - f'(a+\omega) \varphi'' \omega}{(\varphi' \omega)^3} \right), \end{aligned}$$

also — wenn $\varphi \omega$ zugleich mit ω verschwindet, die Differential-Coefficienten von $f(a+\omega)$ und $\varphi \omega$, die zur Anwendung kommen, so wie die aus ihnen gebildeten Ausdrücke, für $\omega=o$ nicht unendlich werden, $\varphi' \omega$ von $\omega=o$ bis zur andern Grenze der Integration sein Zeichen nicht ändert — die Entwicklung des Incrementes einer jeden Function nach den Potenzen einer jeden diesen Bedingungen entsprechenden Function des Incrementes der Unabhängigen, die formelle Erweiterung des Taylorschen Theorems (S. S. 7 und S. 11). Nachdem wir solchergestalt

*) Der Entwicklung (VI, A) entsprechend könnte sie auch so gefasst werden:

$$fz = fa + \int_a^z \frac{f' x}{\varphi' x} \varphi' x \partial x = fa + \frac{f' a}{\varphi' a} (\varphi z - \varphi a) + \int_a^z \text{etc.}$$

die Möglichkeit dieser Entwicklungsform und ihre Bedingungen festgestellt haben, ist es erlaubt, ihre Coefficienten auch noch auf einem andern Wege zu suchen, der diese Möglichkeit voraussetzt, und zu einer in mancher Beziehung interessanten Bestimmung derselben führt. Setzen wir in Folge des Taylorschen oder Mac-Laurinschen Theorems $\varphi \omega - \varphi(o) = \omega \psi \omega$, wo $\psi \omega$ im Allgemeinen für $\omega = o$ nicht verschwinden darf*), so ist demnach

$$f(a+\omega) = fa + a_1 \omega \psi \omega + a_2 \omega^2 (\psi \omega)^2 + \dots + a_n \omega^n (\psi \omega)^n + \dots, \text{ folglich}$$

$$f'(a+\omega) = a_1 (\psi \omega + \omega \psi' \omega) + \dots + n a_n \omega^{n-1} (\psi \omega)^{n-1} (\psi \omega + \omega \psi' \omega) + \dots \quad (H)$$

Ferner ist bekanntlich $(\mathcal{H})$

$$\partial^n (xy) = \partial^n xy + n \partial^{n-1} x \partial y + \dots + \frac{n \cdot n-1 \dots n-r+1}{1 \cdot 2 \dots r} \partial^{n-r} x \partial^r y + \dots + x \partial^n y$$

folglich, wenn $y = \omega^s$, $\frac{\partial^n(xy)}{\partial \omega^n}$ für $\omega = o$ ebenfalls $= o$, sobald $s > n$, aber $= (n \cdot n-1 \dots n-r+1) \partial^{n-r} x : \partial \omega^{n-r}$, sobald $s = r$, $< n$ ist, und die Differential-Coefficienten von x nicht unendlich werden. Es werden demnach in

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial \omega^{n-1}} \left(\frac{f'(a+\omega)}{(\psi \omega)^n} \right) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial \omega^{n-1}} \left(a_1 \frac{\psi \omega + \omega \psi' \omega}{(\psi \omega)^n} \right) + \dots + \frac{\partial^{n-1}}{\partial \omega^{n-1}} \left(a_r r \frac{\omega^{r-1} (\psi \omega + \omega \psi' \omega)}{(\psi \omega)^{n-r+1}} \right) + \dots \quad (G)$$

für $\omega = o$, wie sogleich klar ist, alle Glieder der Reihe verschwinden, die die Factoren a_{n+1} , a_{n+2} u. s. w. haben. Was die vorhergehenden Glieder betrifft, so ergibt sich für $\omega = o$ aus (H)

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial \omega^{n-1}} \left(\omega^{r-1} \frac{\psi \omega + \omega \psi' \omega}{(\psi \omega)^{n-r+1}} \right) = n-1 \cdot n-2 \dots n-r+2 \cdot \frac{\partial^{n-r}}{\partial \omega^{n-r}} \left(\frac{\psi \omega + \omega \psi' \omega}{\psi \omega^{n-r+1}} \right)$$

Nun ist ferner

*) Es würde das Gegentheil, wie leicht ersichtlich, den eben gestellten Bedingungen im Allgemeinen widersprechen. In der That kann eine Entwicklung nach Potenzen $\omega^2 \chi \omega$ offenbar nur möglich sein, wenn $f(a+\omega) - fa = p \omega^2 + \dots$

$$\frac{\partial^{n-r}}{\partial \omega^{n-r}} \left(\frac{\psi \omega}{(\psi \omega)^{n-r+1}} \right) = \frac{\partial^{n-r-1}}{\partial \omega^{n-r-1}} \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{1}{(\psi \omega)^{n-r}} \right) = - (n-r) \frac{\partial^{n-r-1}}{\partial \omega^{n-r-1}} \left(\frac{\psi' \omega}{(\psi \omega)^{n-r+1}} \right)$$

und nach (H)

$$\frac{\partial^{n-r}}{\partial \omega^{n-r}} \left(\frac{\omega \psi' \omega}{(\psi \omega)^{n-r+1}} \right) = (n-r) \frac{\partial^{n-r-1}}{\partial \omega^{n-r-1}} \left(\frac{\psi' \omega}{(\psi \omega)^{n-r+1}} \right)$$

immer für $\omega = 0$, folglich unter derselben Annahme

$$\frac{\partial^{n-r}}{\partial \omega^{n-r}} \left(\frac{\psi \omega + \omega \psi' \omega}{(\psi \omega)^{n-r+1}} \right) = - (n-r) \frac{\partial^{n-r-1}}{\partial \omega^{n-r-1}} \left(\frac{\psi' \omega}{(\psi \omega)^{n-r+1}} \right) + (n-r) \left[\frac{\partial^{n-r-1}}{\partial \omega^{n-r-1}} \left(\frac{(\psi \omega)^{n-r+1}}{\psi' \omega} \right) \right] = 0 \quad \frac{\partial^{n-2-1}}{\partial \omega^{n-2-1}} \left(\frac{\psi' \omega}{(\psi \omega)^{n-2-1}} \right)$$

Nur, wenn $r = n$, erhalten wir, nach (H)

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial \omega^{n-1}} \left(a_n n \frac{\omega^{n-1} (\psi \omega + \omega \psi' \omega)}{\psi \omega} \right) = a_n \cdot n (n-1) (n-2) \cdot \dots \cdot 1$$

Demnach verschwinden für $\omega = 0$ in (G) alle Glieder bis auf dieses, und es ist also $(1.2 \dots n) a_n = \frac{\partial^{n-1}}{\partial \omega^{n-1}} \left(\frac{f'(a+\omega)}{(\psi \omega)^n} \right)$,

wenn nach der Differentiation $\omega = 0$ gesetzt wird. Unter dieser Bedingung geht die obige Entwicklung, die erweiterte Taylorsche, also über in

$$f(a+\omega) = f a + \left(\frac{f'(a+\omega)}{\psi \omega} \right) \omega \psi \omega + \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{f'(a+\omega)}{(\psi \omega)^2} \right) \frac{(\omega \psi \omega)^2}{1.2} + \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \left(\frac{f'(a+\omega)}{(\psi \omega)^3} \right) \frac{(\omega \psi \omega)^3}{1.2.3} \\ + \dots + \frac{\partial^{n-1}}{\partial \omega^{n-1}} \left(\frac{f'(a+\omega)}{(\psi \omega)^n} \right) \frac{(\omega \psi \omega)^n}{1.2 \dots n-1.n} + \dots$$

Setzt man $\psi(a+\omega)$ für $\psi \omega$, so ist $\frac{\partial^n}{\partial \omega^n} \left(\frac{f'(a+\omega)}{\psi(a+\omega)^n} \right)$, für $\omega = 0$, $= \frac{\partial^n}{\partial x^n}$

$\left(\frac{f' x}{(\psi x)^n} \right)$, für $x = a$, oder kurz $= \frac{\partial^n}{\partial a^n} \left(\frac{f' a}{(\psi a)^n} \right)$, und wenn wir $a + \omega = z$ setzen

$$fz = f a + \frac{f' a}{\psi a} (z-a) \psi z + \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{f' a}{(\psi a)^2} \right) \frac{(z-a)^2 (\psi z)^2}{1.2} \dots + \frac{\partial^n}{\partial a^n} \left(\frac{f' a}{(\psi a)^n} \right) \frac{(z-a)^n (\psi z)^n}{2.3 \dots n} + \dots$$

Setzen wir $\frac{1}{\psi z}$ für ψz , $\frac{z-a}{\psi z} = y$ oder $z = a + y \psi z$, so erhalten wir

$$fz = f a + \psi a \cdot f' a \cdot y + \frac{\partial}{\partial a} \left((\psi a)^2 f' a \right) \frac{y^2}{1.2} + \dots + \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} \left((\psi a)^n f' a \right) \frac{y^{n-1}}{2 \dots n} \dots$$

die bekannte Reversions-Formel von Lagrange, die gewöhnlicher Weise,

wie von ihm selbst (théorie des fonctions, 97 und 98), durch partielle Differentiale abgeleitet wird, die aber offenbar zu dem Kreis der Entwicklungen gehört, deren allgemeines Princip, die Basis des Infinitesimal-Calculs bildend, in der Taylorschen Reihe am einfachsten sich ausspricht.

Die einfache Schlussreihe, durch welche wir den allgemeinen Coefficienten der Entwicklung (F) gefunden haben,

$$= \frac{\partial^{n-1}}{\partial \omega^{n-1}} \left(\frac{f'(a + \omega)}{(\psi \omega)^n} \right), \omega \text{ nach der Differentiation} = 0,$$

bleibt, wie leicht zu ersehen, ungestört, wenn wir, anschliessend an die Entwicklung

$$fz = fa + \int_a^z \frac{f'x}{\varphi'x} \varphi'x \partial x = fa + \frac{f'a}{\varphi'a} (\varphi z - \varphi a) + \frac{f''a \varphi'a - f'a \varphi''a}{(\varphi'a)^3} \frac{(\varphi z - \varphi a)^2}{1.2} +$$

$$\int_a^z \left(\int_a^x \left(\int_a^Q Q \varphi'x \partial x \right) \varphi'x \partial x \right) \varphi'x \partial x, Q = \left(\frac{f''x \varphi'x - f'x \varphi''x}{(\varphi'x)^3} \right) \cdot \frac{1}{\varphi'x}, (L)$$

in (G) $z - a$ für ω und $\frac{\varphi z - \varphi a}{z - a}$ für $\psi \omega$ substituieren, wodurch der allgemeine Coefficient dieser Form der Entwicklung sich ergeben würde =

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} \left[\left(\frac{z - a}{\varphi z - \varphi a} \right)^n f'z \right], z \text{ nach der Differentiation} = a.$$

Diese Form der Entwicklung, oder vielmehr dieser Ausdruck ihrer Coefficienten, ist zuerst von Burmann gegeben.*)

Es führt jedoch diese Bestimmungs-Art der Coefficienten, die von der Voraussetzung der Möglichkeit der Entwicklungsform ausgeht, zu keiner an die Auffindung der Coefficienten selbst sich anschliessenden Bestimmung des Restes der Reihe, der dagegen durch die Methode der Entwicklungen (F) und (L) unmittelbar gegeben wird; auf sie, die den Beweis der Möglichkeit mit sich führt und die Bedin-

*) Mém. de l'inst. an VII, p. 15.

gungen derselben sogleich erkennen lässt, wird man zurückgehen müssen, wenn es sich um Bestimmung zweier Grenz-Werthe handelt, zwischen denen der Rest der Reihe enthalten sein muss; wobei jedoch nicht zu übersehen ist, dass eine ganz ähnliche Bestimmung derselben, wie bei der Taylorschen Reihe im engeren Sinne, nur dann stattfinden kann, wenn die derivirte Function derjenigen, nach deren Potenzen entwickelt wird, $\varphi'x$ oder $\frac{\partial \varphi x}{\partial x}$, zwischen den Grenzen des ergänzenden Integrals ihr Zeichen nicht wechselt. Auf eine weitere Erörterung dieses Punctes, so wie der Modificationen, unter denen diese Entwicklungen fortgeführt werden können, wenn ihre Coefficienten $= \infty$ werden, die ebenfalls aus der natürlichen Grundlage derselben in (F) und (L) sich ergeben, kann hier nicht eingegangen werden.

Berichtigungen.

S. 1. Z. 13. *considérée* l. *considéré*.

S. 19. Z. 4. $\int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x} \partial x$, l. $\int_0^\pi \frac{\sin nx}{2\sin \frac{1}{2}x} \partial x$. (π bedeutet hier, wie überall, den halben Umfang des Kreises für den Radius = 1).

Schulnachrichten.

I. Allgemeine Lehrverfassung.

Es ist bereits in dem letzten Programm von dem Verfasser der Schulnachrichten bemerkt worden, dass der nach Ostern 1828 eingeführte Lehrplan im Wesentlichen keine Veränderung und Umgestaltung erfahren habe, weil er seinem Zwecke hinreichend entsprochen hat. Auch für das neue Schuljahr wird derselbe ohne irgend eine bedeutende Abänderung fortbestehen. Mit wahrer Freude kann über die neue Klasse, Sexta, welche zu Anfange des nun bald verflossenen Schuljahrs in's Leben trat, dem theilnehmenden Publicum die Nachricht ertheilt werden, dass dieselbe den gehegten Hoffnungen vollkommen entsprochen habe und der Anstalt für die Zukunft noch grössere Vorthelle verspreche. Das glückliche Gedeihen dieser für die Gelehrten-Schule so wichtigen Klasse verdanken wir vorzüglich dem musterhaften Eifer und dem schätzbaren Lebrtalente des Herrn Collaborator, Dr. *Fischer*, der seinen Schülern auf jede Weise sowohl in Hinsicht der Doctrin, als der Disciplin zu nützen suchte. In dem Gelingen seiner lobenswerthen Bestrebungen fand der wack're Mann seine schönste Belohnung. Wir zweifeln nicht, dass die Eltern, wenn sie nur erst die Vorthelle, welche diese Vorbereitungs-klasse den Anfängern gewährt, etwas näher kennen gelernt haben, noch öfter diese Gelegenheit benutzen und vertrauensvoll ihre Söhne uns zuführen werden. Es würde auch für die folgenden Klassen in Bezug auf eine gründliche und stufenweise Schulbildung von grosser Wichtigkeit sein, wenn wir die Mehrzahl der Schüler von

Sexta an uns zuziehen und bilden könnten. Da mit dem Erlernen des Französischen und Lateinischen hier der Anfang gemacht wird, so können schon Knaben im achten und neunten Lebensjahre aufgenommen werden. Ueber die Vorkenntnisse, welche wir bei den neu eintretenden Schülern in Anspruch nehmen, ist im vorjährigen Schulprogramm das Nöthige bereits bemerkt worden. Billige Rücksicht nehmen wir auf das zarte Alter unsrer Sextaner und lassen sie erst um 9 Uhr des Morgens ihre Lehrstunden anfangen, welche mit Ausschluss des Singunterrichts wöchentlich die Zahl von 26 Lectionen nicht übersteigen. Es wäre zu wünschen, dass in keiner Schule Knaben in dem Alter von 8 - 10 Jahren des Morgens mehr als drei, des Nachmittags mehr als zwei Stunden mit Lehrgegenständen beschäftigt würden.

a. In *Prima* besorgten die sämtlichen Unterrichtsgegenstände 9 Lehrer. Ordinarius der Klasse Dr. *Kraft*.

Lateinische Sprache. Cic. de Finibus Lib. I. & II., 2 Stunden. Director *Kraft*. Tacit. Annal. Lib. I - III., 2 St. Professor *Calmberg*. Horat. Odar. Lib. IV. Epist. Lib. I. & II., 1., 2 St. Prof. *Müller*. Lateinische Schreibübungen a) eigene, häusliche Ausarbeitungen und Abhandlungen, für die obere Abtheilung, regelmässig jeden Monat eine, welche sorgfältig verbessert und jedem Verfasser wegen Mangel an Zeit privatim mit den nöthigen mündlichen Bemerkungen zurückgegeben wurden; b) wöchentliche Exercitia und Extemporalia, 2 St. Lateinische Disputirübungen, 1 St. Director *Kraft*.

Griechische Sprache. Sophoclis Oedip. Coloneus. Hom. Ilias, Lib. IV, 3 St. Thucydides, Lib. II. c. 50 bis Ende und Lib. III. bis c. 60. Aristophan. Equites, v. 1 - 610, 3 St. Griech. Schreibübungen, nach Rost's und Wüstemann's Anleitung, 4. Curs. und Uebersetzung aus dem Jul. Caesar., 1 St. Prof. *Ullrich*.

Hebräische und Arabische Sprache. a) im Hebräischen: Exodus mit beständiger Berücksichtigung der Grammatik; b) im Arabischen: nach der nöthigen grammatischen Vorbereitung Rosenmüller's Arab. Chrestomathie, 2 St. Prof. *Calmberg*.

Deutsche Sprache. Geschichte der Deutschen Literatur, von 1720 bis auf die neuere Zeit, nach Pischon, VI. und VII. Zeitraum, den letzten mit Auswahl und Hervorhebung der bedeutendsten Erscheinungen, nebst Mittheilung von

Probestücken aus den vorzüglichsten Schriftstellern und Erklärung derselben; Zurückgabe der corrigirten Ausarbeitungen; Disputirübungen, 3 St. Prof. *Müller*.

Französische Sprache. Gelesen wurden drei Stücke des Molière, übersetzt aus dem Deutschen in's Französische aus Schillers Don Carlos, 2 St. Lector *Tassart*.

Englische Sprache. Fortsetzung der Lectüre von Bulwers Rienzi; Uebersetzung aus Hauff's Memoiren des Satans in's Englische, 2 St. Lector *Glover*.

Religion. Die christliche Glaubenslehre, nach Niemeyers Lehrbuche, mit beständiger Benutzung der heiligen Schrift, 2 St. Director *Kraft*.

Geschichte. Vortrag der Geschichte des Mittelalters, die aber wegen einer mehrwöchentlichen Krankheit des Lehrers nicht beendigt werden konnte, nach Haake's Lehrbuche, 2 St. Collaborator Dr. *Laurent*.

Römische Literaturgeschichte. Geschichte der vier Perioden der Römischen Literatur, nach Matthiä's Abriss, 2 St. Prof. *Müller*.

Mathematik. Stereometrie, nach Matthias' Leitfaden, 3 St. Prof. *Bubendey*.

Zeichnen. In Verbindung mit Secunda für diejenigen Schüler, welche den Unterricht im Zeichnen noch weiter benutzen wollten, 2 St. Zeichnenlehrer *Hardorff*.

b. In *Secunda* wurde der Unterricht von 9 Lehrern besorgt. Ordinarius Prof. Dr. *Müller*.

Lateinische Sprache. Cic. Oratt. pro Q. Ligario, pro M. Marcello, pro Cn. Pompeii imperio, pro S. Rosc. Amer., pro Milone, 2 St. Prof. *Calmberg*. Virgil. Aen. Lib. II.; Terent. Adelphi, 2 St. Prof. *Müller*. Livius XXII. c. 31 XXIII., 3 St. Prof. *Ullrich*. Wöchentliche Exercitia aus Kraft's Materialien und Lat. Syntax, nach Zumpt, 2 St. Prof. *Müller*. Extemporalia abwechselnd mit Exercitiis aus Kraft's Anleitung 2ter Cursus, 1 St. Director *Kraft*. Lat. und Griech. metrische Uebungen, 1 St. Prof. *Müller*.

Griechische Sprache. Hom. Ilias., Lib. V. VI. XVI., 2 St. Plat. Apolog, Socratis, nach Jacobs' Socrates, 1 St. Prof. *Müller*. Herodot. Lib. VIII. und einige Abschnitte aus Jacobs' Socrates, 3 St. Prof. *Ullrich*. Griechische Schreibübungen, nach Rost's und Wüstemann's Anleitung 3. Cursus, 1 St. Prof. *Ullrich*.

Hebräische Sprache. a) obere Abtheilung: Syntax, nach Gesenius. Uebersetzung prosaischer und poetischer Lesestücke aus Gesenius' Chrestomathie. Ueber-

setzung evangelischer Perikopen in's Hebräische, nach Schröders Uebersetzungsbuche. b) untere Abtheilung: Formenlehre, nach Gesenius. Uebersetzung leichter prosaischer Lesestücke aus Gesenius' Lesebuche, 4 St. Prof. *Hinrichs*.

Deutsche Sprache. Uebersicht der allgemeinen Rhetorik. Correctur schriftlicher Aufsätze, in Verbindung mit mündlichen Vorträgen der Schüler, 3 St. Prof. *Hinrichs*.

Französische Sprache. Die grössere Hälfte der Bibliothèque Française par Franceson Tom. II. Uebersetzungen aus dem Deutschen in's Französische, 3 St. Lector *Tassart*.

Englische Sprache. Lectüre von Williams' Reader, Part second. Uebersetzungen aus Engel's Lorenz Stark in's Englische, 2 St. Lector *Glover*.

Religion. Allgemeine Religionsgeschichte, nach Niemeyer's Lehrbuche, nebst Lectüre einiger Abschnitte aus der Apostelgeschichte und dem Evang. d. Marcus in der Ursprache, 2 St. Prof. *Müller*.

Geschichte. Uebersichtliche Darstellung der Geschichte der merkwürdigeren Völker des Alterthums, nach Haake's Lehrbuche, 1. Theil, 3 St. Collaborator Dr. *Laurent*.

Mathematik. a) Beendigung der Planimetrie, Abschnitt VI., VII., VIII. in Matthias' Leitfaden. b) Wiederholung und Fortsetzung der Algebra bis einschliesslich zu den Gleichungen des dritten Grades, 3 St. Prof. *Bubendey*.

Zeichnen. In Verbindung mit Prima, wöchentlich 2 St. Zeichnenlehrer *Hardorff*.

c. In *Tertia* unterrichteten 9 Lehrer. Ordinarius Prof. *Calmberg*.

Lateinische Sprache. Caesar de Bello Gall. Lib. VII., 2 St. Prof. *Calmberg*. Ovid. Metam. Lib. IV., 604 - 803; VI., 604 - 803; V., 1 - 236; VI., 1 - 102; 129 - 381, 2 St. Prof. *Müller*. Chrestom. Cic. ed. Kraft und Cic. Cat. Maior, 2 St. Collaborator Dr. *Fischer*. Lat. Grammatik, nach Zumpt, §. 1 - 60 und §. 362 - 450, 2 St. Lat. Prosodik mit praktischen Uebungen verbunden, 1 St. Prof. *Calmberg*. Lat. Exercitia aus Kraft's Anleitung zum Uebersetzen aus dem Deutschen in's Lateinische, 1. Cursus. Lat. Extemporalia, die nach der Correctur memorirt und aufgesagt wurden, 2 St. Prof. *Calmberg*.

Griechische Sprache. Xenoph. Anab. Lib. I., 2 St. Prof. *Ullrich*. Hom. Odyss. VI. - VIII., alles Gelesene wurde memorirt und aufgesagt, 2 St. Prof. *Calmberg*. Griech. Grammatik, nach Kühner's Griech. Schulgrammatik, 1 St. Griechische Schreibübungen in fortwährender Verbindung mit der Grammatik, 1 St. Prof. *Calmberg*.

Deutsche Sprache. Erklärung von Becker's Schulgrammatik, Declamationen; Correctur der eingelieferten schriftlichen Aufsätze, 3 St. Collaborator Dr. *Laurent*.

Französische Sprache. Lectüre des Gil Blas, Uebersetzung aus dem Deutschen in's Französische, 3 St. Lector *Tassart*.

Englische Sprache. In zwei Abtheilungen: Lectüre von Williams' Reader, Part first. Uebersetzung der Uebungsstücke aus Williams' Engl. Grammatik, 4 St. Lector *Glover*.

Religion. Christliche Sittenlehre. Die Beweisstellen wurden im Urtexte verglichen und erklärt, 2 St. Prof. *Calmberg*.

Geschichte. Römische Geschichte, nach Kraft's Zeittafeln, 2 St. Collaborator Dr. *Laurent*.

Geographie. Topische Geographie von Europa, 1 St. Collaborator Dr. *Laurent*.

Mathematik. Wiederholung und Fortführung der Geometrie bis zur Beendigung des Abschnittes VI. des Lehrbuches. Einfache Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten, 4 St. Prof. *Bubendey*.

Zeichnen. Wöchentlich in zwei Stunden bei dem Zeichnenlehrer *Hardorff*.

Gesang. Hat erst seit Neujahr unter der Leitung des Gesanglehrers *Klapproth* begonnen; wöchentlich zweimal.

d. In *Quarta* unterrichteten 8 Lehrer. Ordinarius Prof. *Ullrich*.

Lateinische Sprache. Phaedri Fabulae, Lib. I. II. III., die erklärten Fabeln wurden memorirt und aufgesagt, 2 St. Prof. *Ullrich*. Corn. Nepos. Miltiades — Alcibiades, 3 St. Collaborator Dr. *Laurent*. Lat. Grammatik, nach Zumpt's Auszüge und Hoffmann's Beispielsammlung, 2 St. Prof. *Hinrichs*. Exercitia, nach Dronke's Aufgaben zum Uebersetzen, 2 St. Prof. *Hinrichs*. Prosodik nebst schriftlichen Uebungen, 1 St. Prof. *Ullrich*.

Griechische Sprache. Jacobs' Griech. Elementarbuch, 1. Band, 2 St. Griech. Formenlehre nach Kühner's Griech. Schulgrammatik, 2 St. Schreibübungen, nach Rost's und Wüstemann's 1. Cursus, 1 St. Prof. *Ullrich*.

Deutsche Sprache. Erläuterung der Beckerschen Schulgrammatik. Declamationsübungen. Correctur der schriftlichen Aufsätze; alle 14 Tage wurde eine Arbeit eingeliefert, 3 St. Collaborator Dr. *Meyer*.

Französische Sprache. Grammaire Méthodique; Lectüre der Secondes Lectures, p. 1 - 100. Uebersetzungen aus dem Deutschen in's Französische, nach Gallois' Uebersetzungsbuche, 116 Seiten, 3 St. Lector *Gallois*.

Religion. Die christliche Glaubenslehre, nach dem grösseren Hamburgischen Katechismus, Uebersicht der biblischen Schriften, Erklärung evangelischer Perikopen, 3 St. Prof. *Hinrichs*.

Geschichte. Im Sommerhalbjahre: Geschichte des Mittelalters, im Winterhalbjahre: Geschichte der neuern Zeit, 2 St. Collaborator Dr. *Meyer*.

Geographie. Von Ostern bis Michaelis: Africa, und Repetition über Spanien, Frankreich und die Niederlande. Von Michaelis bis zum Schlusse des Schuljahrs: America, und Repetition über Deutschland, 2 St. Collaborator Dr. *Meyer*.

Mathematik. a) Geometrie: die vier ersten Abschnitte von Matthias' Leitfaden. b) Arithmetik: Buchstaben-Rechnung, Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten, 4 St. Prof. *Bubendey*.

Zeichnen. Wöchentlich in 2 Stunden bei dem Zeichnenlehrer *Hardorff*.

Schönschreiben. Zweimal wöchentlich bei dem Schreiblehrer *Elten*.

Singen. Seit Anfange dieses Jahres zweistündig bei dem neuen Gesanglehrer *Klapproth*.

e. *Quinta.* Den Unterricht in dieser Klasse ertheilten 8 Lehrer. Ordinarius Prof. *Hinrichs*.

Lateinische Sprache. Formenlehre der Lat. Sprache, nach dem Auszuge aus Zumpt's grösserer Grammatik und Hoegg's Uebungsstücken, 2. Cursus, 2 St. Uebersetzung ausgewählter Lesestücke aus Jacobs' Lat. Elementarbuche, 1. Bändchen, 3 St. Lat. Schreibübungen nach Schulze's Vorübungen, 1 St. Prof. *Hinrichs*.

Griechische Sprache. Nach Kühner's Elementar-Grammatik der Griech. Sprache Einübungen der Paradigmen bis zu den Verbis anomalis, nebst Uebungen im Uebersetzen aus dem Griechischen in's Deutsche und aus dem Deutschen in's Griechische, 4 St. Collaborator Dr. Meyer.

Deutsche Sprache. Erklärung von Heyse's kleiner Grammatik; Lectüre und Erklärung Deutscher Gedichte; Declamation; Correctur der alle 14 Tage eingeliferten Aufsätze, 3 St. Collaborator Dr. Meyer.

Französische Sprache. Einübung der Paradigmen und der nöthigsten Regeln der Syntax, nach der Grammaire Méthodique, nebst Uebersetzung der in derselben enthaltenen Deutschen Aufgaben; Lectüre von Secondes Lectures par Willm, 4 St. Lector Gallois.

Religion. Die christliche Glaubenslehre, nach dem kleinen Hamburgischen Katechismus. Erzählungen aus der biblischen Geschichte des A. T., 3 St. Prof. Hinrichs.

Naturbeschreibung. Im Sommerhalbjahr: Botanik, im Winterhalbjahr: Zoologie, nach Goldfuss' naturhistorischem Atlas, 2 St. Prof. Calmberg.

Geschichte. Kurze Uebersicht der Geschichte der merkwürdigeren Völker des Alterthums, nach Stüve's Leitfaden, 2 St. Collaborator Dr. Meyer.

Geographie. Im Sommersemester: die westlichen Staaten, im Wintersemester: die östlichen Staaten Europa's und Repetition, besonders Deutschland's, 2 St. Collaborator Dr. Meyer.

Mathematik. a) Anfangsgründe der Geometrie, die einfachsten Constructionen und geometrischen Berechnungen, so wie Uebungen des Denkens an der Betrachtung verschiedener Figuren und Körper überhaupt. b) Arithmetik: Uebungen in der gemeinen Arithmetik, 4 St. Prof. Bubendey.

Schönschreiben. Zweimal die Woche bei dem Schreiblehrer Elten.

Singen. Seit Anfange dieses Jahres wöchentlich zweimalige Uebungen bei dem Gesanglehrer Klapproth.

f. *Sexta* erhielt ihre Lehrstunden von 5 Lehrern. Ordinarius Collaborator Dr. Fischer.

Lateinische Sprache. Formenlehre, nach Zumpt's Auszug aus dessen grösserer Grammatik; Einübung der Declinationen der Substantive, Adjective und Pronomina, der vier regelmässigen Conjugationen, des Gebrauchs der Zahlwörter, der Präpositionen und der gebräuchlichsten Conjugationen; wöchentlich 2 schriftliche Uebersetzungen aus dem Deutschen in's Lateinische: Hoegg's Uebungstücke, p. 1 - 60 und 2 schriftliche Uebersetzungen aus dem Lateinischen in's Deutsche; Jacobs' Lateinisches Elementarbuch 1ster Cours p. 1 - 26, 4 St. Collaborator Dr. Fischer.

Deutsche Sprache. Die Lehre von der Abstammung, Bildung und Biegung der Wörter; die Lehre von der Bildung der Wortfolge einfacher, erweiterter und zusammengesetzter Sätze; orthographische Uebungen; Uebungen im Lesen und im mündlichen Vortrage; schriftliche Aufsätze, 4 St. Collaborator Dr. Fischer.

Französische Sprache. Aus der Formenlehre: Gebrauch der verschiedenen Artikel, Verbindung der Adjective mit den Substantiven, Einübung der Pronomina, der Hülfszeitwörter und der vier regelmässigen Conjugationen; wöchentlich eine Uebersetzung aus dem Deutschen in's Französische, nach Schaffers kleiner Französischen Grammatik, im Sommerhalbjahre, Collaborator Dr. Fischer, im Winterhalbjahre, Schulamts-Candidat Dr. Henning. Uebungen im Lesen, wöchentlich eine schriftliche Uebersetzung aus dem Französischen in's Deutsche; Premières Lectures Françaises, zusammen 3 St. Collaborator Dr. Fischer.

Biblische Geschichte. Erzählungen aus dem A. und N. T. nach Rauschenbusch auserlesenen biblischen Historien. Erläuterung des Gelesenen. Aufsagen der memorirten Liederverse, 2 St. Director Kraft.

Naturbeschreibung. Gemeinschaftlich mit Quinta, 2 St. Prof. Calmberg.

Geographie. Als Einleitung das Fasslichste aus der mathematischen und physikalischen Geographie; allgemeine Uebersicht der Land- und Wasser-Vertheilung und Erklärung der gebräuchlichsten Bezeichnungen; Gebirgs- und Flusssysteme von Europa, 2 St. Collaborator Dr. Fischer.

Geschichte. Gemeinschaftlich mit Quinta, 2 St. Collaborator Dr. Meyer.

Arithmetik. Die Klasse war in zwei Abtheilungen getheilt; die untere Abtheilung wurde mit den vier Grundrechnungsarten in benannten und unbenannten ganzen Zahlen, mit einfachen und zusammengesetzten Grössen, so wie mit den

wissenswürdigsten Eigenschaften der Zahlen bis 100 bekannt gemacht. Die obere Abtheilung beschäftigte sich zuerst mit den vier Grundrechnungsarten in gebrochenen Zahlen, vorzüglich mit den Decimalbrüchen, dann wurde sie durch das Quadriren mit den Quadratzahlen bekannt gemacht und ging zuletzt zur Extraction der Quadratwurzel über. Auch machte der Lehrer einen Anfang mit der Lehre von den geometrischen Verhältnissen. Ueberdiess wurde für beide Abtheilungen eine Stunde auf Kopfrechnen verwendet und dabei sorgfältig darauf geachtet, dass nicht allein mechanische Fertigkeit erlangt, sondern auch die Denkkraft der Schüler geübt wurde, 4 St. Rechenlehrer *Möller*.

Schönschreiben. Wöchentlich 3 St. bei dem Schreiblehrer *Elten*.

Singen. Zweimal die Woche bei dem Gesanglehrer *Klapproth*.

II. *Schulchronik.*

1. *Ausserordentliche Schulfeierlichkeiten.*

Für die Annalen unsers Johanneums sind aus dem verwichenen Jahre zwei seltene Schulfeierlichkeiten aufzuzeichnen, von denen die eine alle Freunde der alten Johannis-Schule, vorzüglich die ehemaligen Zöglinge, zu dankbarer Wehmuth, die andere zur Freude und zu frohen Hoffnungen für die Zukunft stimmte. Die erstere galt dem Abschiede aus dem alten Johanneum, die zweite der Einweihung der neuen Schulgebäude auf dem Domsplatze. Ueber beide soll hier kurz und einfach berichtet werden.

Auf einen motivirten Antrag des unterzeichneten Berichterstatters genehmigte eine Hochlöbliche Schuldeputation, dass vor der Einweihung der neuen Schulgebäude eine angemessene Abschiedsfeierlichkeit in dem alten Johanneum veranstaltet werden solle. Dem Director wurde die specielle Anordnung derselben überlassen. Den 30. April Mittags 12 Uhr fand die ernste Feier vor einer sehr zahlreichen Versammlung statt. Durch freiwillige Beiträge der Schüler an Geld und durch freundliche Spenden aus Gärten war die Prima zu einem stattlich geschmückten Hörsaal umgewandelt worden. Grüne Guirlanden und Blumengewinde zierten

ringsum Wände und Säulen. Bugenhagens, Gurlitts und Hipps Bildnisse waren mit frischen Kränzen umwunden. Festlich prangte auch der doppelte, altherwürdige Katheder, von dem zum letzten Male die Stimme der Lehrer und eines wackern aus der Schule scheidenden Jünglings ertönen sollte. Um die nöthige Ordnung zu erhalten, war die Einrichtung getroffen worden, dass nur gegen Einlasskarten der Zutritt gestattet wurde. Die Feierlichkeit begann mit einem von unserm trefflichen Dichter, dem Herrn Pastor *Freudentheil*, verfassten Choral, welchen ein zahlreicher Verein geübter Sänger unter passender Begleitung von Posaunen auf eine wahrhaft erhebende Weise vortrug. Wir glauben uns den Dank der Leser unseres Schulberichts zu verdienen, wenn wir die Worte des schönen Chorals hier mittheilen.

Mel. Wachet auf, ruft uns die Stimme.

Heiligt Gott die letzte Stunde!

Lobsingt; Er war mit uns im Bunde.

Jahrhunderte, verkündet ihn!

Hier auch war die Pflegestätte

Des höchsten Bildners; hier auch wehte

Sein Odem, und sein Licht erschien.

Ihm wurdest du geweiht

In Luthers grosser Zeit.

Theure Pflanzstatt!

Er war mit dir,

Er wohnte hier.

Mit ihm, mit ihm vollenden wir.

Preis dem Geber, dem Erhalter!

Ihn pries seit manchem Menschenalter

Die Saat, die fröhlich hier gedieh.

Viele, die getreu hier lehrten

Und lernten, gingen zu Verklärten.

Von Himmelshöhen mahnen sie:

Der Jugendfrühling weicht;

Der Lebenstag erbleicht.

Ehrt die Stunden!

Es kommt die Nacht.

Wer würdig wacht,

Ruft einst getrost: Es ist vollbracht.

Nahe mag das Ziel uns winken!

Ihr Mauern mögt zertrümmert sinken!

Gott bleibt uns stets ein fester Hort.

Letztes Hallelujah, kröne

Hier unser Werk, und dankbar töne

In Wehmuth unser Scheidewort!

Auch hier war Gottes Haus.

Wir ziehen segnend aus.

Hallelujah!

Der mit uns zieht,

Der nimmer flieht,

Sei ewig unser höchstes Lied!

Nachdem die beiden ersten Verse gesungen waren, bestieg der Director den Katheder. Zuerst sprach er von der ernsten Bedeutung der Feier; stellte dann in kurzen Umrissen die Geschichte der Schule von ihrer Gründung an bis auf die neueste Zeit in denjenigen Männern dar, welche zur Leitung der Anstalt von dem Staate berufen worden waren. Er würdigte in gedrängter Kürze ihre Verdienste um das Johanneum und um die Wissenschaften, und erklärte in Bezug auf den letzten hochverdienten Director, dass er seines Lobes nicht bedürfe, da so viele lebende Zeugen seine segensreiche Wirksamkeit preisen könnten und schon gepriesen hätten. Sodann richtete er an die Schüler der Anstalt noch Worte herzlicher und eindringlicher Mahnung, dass sie, eingedenk der edeln und berühmten Männer, die einst in dem alten Johanneum ihre erste wissenschaftliche Bildung erhalten hätten, nach gleichem Ruhme streben und ihnen würdig nacheifern möchten. Voll tiefer Rührung wandte er sich zuletzt noch an die theure Pflegerin, welche länger als 300 Jahre eine zahlreiche Jugend in ihrem mütterlichen Schoosse auferzogen

habe, und fügte diesen Abschiedsworten noch ein kurzes Gebet an den mächtigen und gütigen Beschützer und Förderer aller menschlichen Werke hinzu.

Nach dem Director sprach der letzte Primus im alten Johanneum, der Abiturient *Sengemann*, ein wackerer Zögling unserer Anstalt, mit jugendlicher Begeisterung und tiefem Gefühle Worte des Abschieds von der ehrwürdigen Schule, Worte dankbarer Erinnerung an die Männer, welche einst segensreich hier gewirkt hatten, und deren Bildnisse Zeugen der dankbaren Feier waren, an *Gurlitt* und *Hipp*, Worte des innigen Dankes endlich gegen die noch lebenden Lehrer, welche durch Lehre und Beispiel ihren Schülern vielfach genützt hätten.

Zuletzt bestieg der Herr Professor *Müller*, der älteste der Professoren, die Rednerbühne und sprach mit sichtbarer Rührung, mit Wahrheit und Ernst über die Frage: Wie in diesen Hallen gelehrt und gewirkt worden sei. Er schilderte den Geist des Unterrichts seit der erfreulichen Umgestaltung der Anstalt nach Gurlitts Ankunft in Hamburg und verband mit dieser Schilderung die dankbare Erinnerung an einige der verstorbenen Lehrer. Auch erwähnte er mehrere der ausgezeichnetsten, jetzt im Auslande wirkenden Männer, welche einst in dem Johanneum ihre Jugendbildung erhalten hatten. Passend und ergreifend waren die Schlussworte des Festredners: „So mögt ihr denn zusammenstürzen, ihr ehrwürdigen Mauern, aber wir trennen uns von euch mit den wehmüthigsten Gefühlen. Dürfte ich einen Wunsch aussprechen, so wäre es der, dass hier, wo die nie rastende Betriebsamkeit bald glänzende Häuserzeilen erheben wird, ein kleines, unscheinbares Zeichen den Nachkommen sagen möchte: Hier stand einst Hamburgs Gelehrten-Schule; der Boden, da du auftrittst, ist ein heilig' Land. Aber wenn es dann auch einst von unserer Schule heissen mag: ihre frühere Stätte kennt man nicht mehr, so möge doch nie und nimmer der Tag erscheinen, wo man sagen darf: ihr Glanz ist erloschen, ihr Stern ist verblichen!“

Den Schluss machte der dritte Vers des Chorals. Unverkennbar war der tiefe Eindruck, welchen die ernste, würdige Feier auf die Herzen der Anwesenden gemacht hatte.

An diesen letzten Act schuldiger Pietät schloss sich einige Tage später eine andere Art des Abschiedes der ehemaligen Zöglinge des Johanneums an, den Re-

ferent in der Chronik unsrer Schule nicht mit Stillschweigen übergehen darf. Es war nämlich einige Wochen vor dem Auszuge aus der alten Schule durch die frühern Schüler des Johanneums eine Comitté gebildet worden, welche die Anordnung und Leitung eines Abschiedsfestes übernehmen sollte. Man vereinigte sich dahin, dass am Abend des 4. Mai, also am letzten Tage vor der Einweihung der neuen Schule, die ehemaligen Primaner und Gymnasiasten sich zu einem Festschmause in der alten Prima vereinigen sollten. Die Einladung dazu geschah in Lateinischer Sprache. Ausser den hiesigen Schülern unsers Johanneums nahmen auch mehrere der auswärtigen an dem seltenen Feste Theil. Gegen dritthalb hundert vormalige Schüler beider Gelehrten-Anstalten fanden sich, der Bestimmung der Comitté gemäss, um 7 Uhr des Abends in dem grossen Hörsaale des akademischen Gymnasiums ein. Als Senior erschien dabei Se. Magnificenz, unser hochverehrter und hochverdienter Herr Bürgermeister *Bartels*. Nachdem sich alle herzlich begrüsst und möglichst dem Alter nach geordnet hatten — recht passend bekam jeder Theilnehmer eine Lateinisch abgefasste Einlasskarte mit Bezeichnung des Platzes, den er an der Festtafel einnehmen sollte — bestieg Herr Professor *Krabbe* nach dem Wunsche der Festordner den Katheder und rief in Lateinischer Sprache herzlich und eindringlich das Andenken früherer Jahre und vorzüglich das Andenken an den um beide Anstalten des Gymnasiums und Johanneums vielfach verdienten Director *Gurlitt* den Anwesenden ins Gedächtniss zurück. Hierauf reiheten sich die Theilnehmer nach der Zeit, wo sie Schüler der einen oder der andern Anstalt gewesen waren, paarweise zusammen, zogen durch die Hinterthür des Gymnasiums nach dem Johanneum und hielten unter dem Schalle einer wohlbekannten Musik einen Umgang durch die sämmtlichen Klassen. Man kann sich leicht denken, welche frohe Erinnerungen aus der Schulzeit den Wandernden bei diesem Umzuge vor die Seele traten. Nach dieser Wanderung durch die alten Klassen betrat der Zug das mit grünen Guirlanden und reicher Erleuchtung geschmückte Auditorium der Prima. Drei grosse Tafeln waren in demselben für die älteren Zöglinge nach chronologischer Ordnung bestimmt; die jüngeren mussten wegen des beschränkten Raumes theils in der sogenannten Spazierklasse, theils auf dem Lector der Prima Platz nehmen. Unter dem Schalle eines guten Musikcorps und in der frohesten Stimmung ordneten sich die Festtheilnehmer an den Tischen. Die sämmt-

lichen Lehrer aller drei Anstalten, des Gymnasiums, der Gelehrten-Schule und der Realschule, waren freundlich zur Theilnahme an diesem schönen Abschiedsmahle eingeladen worden. Ein trefflicher Choral, von dem Herrn Pastor *Freudentheil*, der unter dem Rector *Lichtenstein* das Johanneum besuchte, gedichtet, wurde unter Begleitung von Musik von der Versammlung angestimmt, nach dessen Schluss der Herr Bürgermeister *Bartels* einige herzliche Worte über die Bedeutung des Festes sprach. Nun betrat Herr Prof. *Müller* den oberen Katheder und verlas die bei dem Festmahl zu beobachtenden sechs Gesetze, welche nach Art der alten Römischen Gesetze, wie sie sich bei Cicero zum Theil noch vorfinden, abgefasst waren und nicht minder durch den muntern Humor, der sich in ihnen aussprach, als durch ihre Form lebhaften Beifall fanden. Bei der vorherrschenden Fröhlichkeit und dem jugendlichen Sinne, der die Mehrzahl der Anwesenden belebte, wurden dieselben jedoch nicht im strengsten Sinne befolgt, besonders das sechste Gesetz, welches verordnete: *post mediam noctem pocula nulla*. Jetzt begann das heitere Mahl selbst, dessen Würze nach Homerischer Weise Gesang und Musik war.

Längere und kürzere Lieder, welche für diesen Zweck verfasst worden waren, wurden theils von einem auserlesenen Sängerchor, das aus ehemaligen Schülern des Johanneums bestand, trefflich vorgetragen, theils auch von allen gesangfähigen Gästen gesungen. Herr Dr. med. *Hahn* hatte zu den Liedern sehr schätzbare Beiträge geliefert. Ausserdem wurden zur Belebung der allgemeinen Heiterkeit noch zehn bestimmte, zum Theil recht sinnreiche, Toasts ausgebracht, an die sich dann mehrere ausserordentliche anschlossen. Während der ganzen Tischzeit herrschte eine sich immer steigernde Heiterkeit und eine wahrhaft jugendliche Munterkeit, selbst bei den älteren Theilnehmern. Denn die Zurückerinnerung an die glücklichen Stunden, welche sie einst in den alten, ehrwürdigen Hallen unserer Schule verlebt hatten, verjüngte sogar die Greise. Als die Thurmuh die zwölfte Stunde der Nacht verkündete, liess auch die Glocke auf dem Schulhofe ihre wohlbekannten Töne deutlich erschallen. Da bestieg der letzte Redner, Herr Hauptpastor Dr. *Strauch*, den Katheder und richtete einige Worte liebevoller und erhebender Mahnung an die Gesellschaft. Ein zweites Lied, von unserm verehrten Herrn Pastor *Freudentheil* verfasst, wurde als Schlussgesang, unter Begleitung von Blasinstrumenten, abgesungen. Wir lassen es hier folgen:

Gekommen ist die Nacht.

Genossen, blickt nach oben!

Auch unsre Freude preis't

Den höchsten Geber d'roben.

Den Leib, das Herz erquickt

Hat treuer Liebe Hand.

O knüpfe sie hinfort

Um uns ihr himmlisch' Band!

Gekommen ist die Nacht

Auch euch, ihr theuern Hallen,

Und unser Scheidegruss

Soll segnend euch erschallen.

Gott gebe nun und einst,

Ist unser Lauf vollbracht,

Nach gutem Tagewerk

Uns eine gute Nacht!

Ein grosser Theil der Theilnehmer an diesem herrlichen Schulfeste konnte sich erst nach Mitternacht von dem Orte, der allen lieb und theuer war, trennen. Dankbar erkannte auch jeder die Verdienste an, welche sich die Ordner und Leiter des Festes durch ihre Sorgfalt, Umsicht und Einsicht um die ganze Gesellschaft erworben hatten.

Wir kommen endlich zur Erwähnung der seltenen Feierlichkeiten, welche von den obern Behörden zur Uebergabe und Einweihung der neuen Gymnasial-, Schul- und Bibliothek-Gebäude auf den 5. und 7. Mai festgesetzt worden waren. In der neuen Aula, einem geräumigen, freundlichen Saale, waren für die Zuhörer passende Sitze angewiesen. Die hohen Behörden, einige fremde Gesandte und andere angesehene Männer und Gelehrte der Stadt und Nachbarschaft, wie aus Altona, Harburg, Lübeck, waren zahlreich versammelt. Um 12 Uhr wurde die erhebende Feierlichkeit mit einer vortrefflichen Cantate, welche der schon vorher rühmlich erwähnte Herr Pastor *Freudentheil* gedichtet und unser *F. W. Grund* mit seiner vielfach bewährten Virtuosität in Musik gesetzt hatte, zum grossen Genusse der Festversammlung

aufgeführt. Zwei ausgezeichnete Gesang-Virtuosen, unser wackrer Bassist *Reichel*, und der als Gast eben anwesende treffliche Tenorist *Tichatscheck*, wirkten zur Ausführung der schönen Cantate sehr vortheilhaft mit. Nach dem ersten Theile derselben bestieg unser hochverehrte und um die Vollendung des Neubaues auf dem Domsplatze vielfach verdiente Herr Protoscholarch, Senator *Pehmöller*, zuerst den oberen Katheder und sprach zunächst in einer Deutschen Rede von der Denkwürdigkeit des neu bebauten Platzes. Er bemerkte, dass zwar der Bau ein neuer, aber Grund und Glaube ein alter sei. Jeder Fortschritt der Gegenwart müsse in der Vergangenheit wurzeln. Er fügte dann Ermuthigungen für die Lehrer, und freundliche, väterliche Ermahnungen für die Schüler unsrer Anstalt hinzu. Die letzteren pries er glücklich, dass ihre Jugend in eine Zeit falle, wo für die sittliche und geistige Bildung der Knaben und Jünglinge durch zweckmässigen Unterricht und durch geschickte und humane Lehrer viel besser gesorgt sei, als in der früheren Zeit. Dies müsse die Jugend zur Dankbarkeit gegen den Staat, zum regen Fleiss und zu jeglicher Tugend mächtig anspornen. Dann übergab er im Namen des Senates die neuen Gebäude dem Scholarchate, als der obern Schulbehörde Hamburgs.

Es folgte nun die eigentliche Weibrede, welche unser würdige und gründlich gelehrte Herr Dr. *Rambach*, Senior des Hamburgischen geistlichen Ministeriums, in Lateinischer Sprache hielt. Sie fand sowohl wegen ihres interessanten Inhalts, als wegen ihrer guten Latinität wohlverdienten Beifall. Der verehrte Festredner führte seine Zuhörer bis in jene Zeit des dunkeln Mittelalters hinauf, wo Hamburg durch den gewaltigen Frankenkönig, Karl den Grossen, die erste christliche Kirche erhielt und zwar auf demselben Platz, wo die neuen Schul- und Bibliothek-Gebäude errichtet worden waren. Passend wurde darauf aufmerksam gemacht, wie die christliche Kirche unter vielfachen und grossen Stürmen sich glücklich erhalten habe; unverkennbar sei hier der Schutz der göttlichen Vorsehung. Da das alte Johanneum seinen früheren Platz nicht habe behalten können, so sei gewiss die Wahl des neuen Platzes eben so passend als würdig. Hierauf lenkte er die Aufmerksamkeit der Zuhörer auf die neuen Gebäude hin, welche jetzt den Domsplatz schmückten, und der ganzen Stadt zu einer wahren Zierde gereichten. Mit den inhaltschweren Worten: „Quod bonum felix faustum fortunatumque esse iubeat summum numen,“ und mit einigen väterlichen, herzlichen Worten an die Lehrer und die Schüler der Anstalt

weihete der Redner die neuen Gebäude der Wissenschaft, dem segensreichen Unterrichte und der gedeihlichen Erziehung der Jugend zum wahren und dauernden Heil für den Staat und das Vaterland.

Der zweite Theil der Festcantate beschloss den ersten Tag der seltenen Schulfeyerlichkeit. Des Mittags vereinte der Herr Protoscholarch einen Theil der Herren Scholarchen und die Professoren der drei höhern Bildungs-Anstalten an seiner gastlichen Tafel.

Am 7. Mai folgte die Fortsetzung der Einweihungs-Feierlichkeiten. Nach 11 Uhr des Morgens versammelten sich zum letzten Male die Lehrer der beiden Schulen in den Räumen des alten Johanneums und zogen gegen 12 Uhr aus denselben nach dem neuen, stattlichen Schulgebäude. Die Lehrer der Gelehrten-Schule eröffneten den Zug. An sie schlossen sich ihre Schüler an. Die Lehrer der Realschule folgten unmittelbar darauf mit einer zahlreichen Schülerzahl. Am ersten Festtage hatten wegen Mangel an Raum nur Deputationen aus jeder Klasse der beiden Schulen mit ihren Lehrern in die Aula Zutritt erhalten können. Dagegen versammelte sich am zweiten Tage die ganze Schuljugend in der neuen Aula. Nachdem der lange Zug sich in dem Saale geordnet hatte, wurde die am 5. Mai zur Aufführung gebrachte Cantate wiederholt und zwar ebenfalls in zwei Abtheilungen. Am Ende der erstern sahen wir unsern hochverehrten Senior, Herrn Dr. *Rambach*, zum zweiten Male den Katheder besteigen. In einer kurzen Deutschen Rede nahm er sehr passend von dem schönen Neubau und dessen hellen, lichten Räumen Gelegenheit, folgende beherzigenswerthe Gedanken auszusprechen: Licht und hell wären die Räume der neuen Gebäude, welche der Staat auf liberale Weise auf dem althehrwürdigen Domsplatze habe erbauen lassen. Licht und Wahrheit möchten daher in diesen freundlichen Hallen gleichsam ihre beständige Wohnung aufschlagen, und jener fromme, ächt christliche Geist hier walten, welcher einst den edeln, verdienstvollen Apostel des Nordens, *Ansgar*, zu unsterblichen Thaten begeistert und gestärkt habe. Fern solle der neuen Schule bleiben die durch Menschensatzungen, Vorurtheile, Missverständnisse entstellte und getrübe Christuslehre; nur das reine, einfache, wahrhafte Christenthum solle hier gelehrt und geübt werden. Zuletzt wandte er sich mit freundlichem Zuruf an die Lehrer der Anstalt

und ermunterte die Schüler zu dem edeln Entschlusse, schon früh ihre Kräfte dem Vaterlande und seinen höchsten Interessen zu weihen, indem er ihnen die Worte des alten Dichters ans Herz legte:

Patriae impendere vitam,
Nec sibi, sed toti genitum se credere mundo.

Nach dieser Einleitungsrede hielt zunächst Herr Professor *Krabbe*, d. z. Rector des akademischen Gymnasiums, eine Lateinische Rede über das wichtige Thema: *De studiorum ratione hac nostra aetate vel maxime commendanda*. Mit Recht empfahl der von seinem Gegenstande sichtbar erwärmte Redner gründliches Betreiben der Humanitäts-Studien als die sichere Grundlage aller höheren Bildung und einer gründlichen Erudition. Er suchte dann auf eine überzeugende Weise darzuthun, wie heilsam und mächtig die Einwirkung der erwähnten Studien auf andere Disciplinen, namentlich auf Theologie, Philosophie und Geschichte wäre, wiewohl er gern und willig zugestand, dass die Naturwissenschaften in der neuern Zeit bewundernswerthe Fortschritte gemacht hätten.

Es folgte hierauf der zweite Festredner, der unterzeichnete Berichterstatter. Auch er liess sich nach alter, guter Sitte als Schul-Director in Lateinischer Sprache vernehmen, und bemühte sich, die Frage zu beantworten: *Quibus fundamentis scholarum publicarum salus, fama lausque omnis nitatur atque sustentetur*. Er glaubte als Hauptbedingungen des glücklichen Gedeihens der öffentlichen Schulen aufstellen zu müssen: ächte Religiosität und moralische Tüchtigkeit, fleissiges und eifriges Betreiben der Humanitäts-Studien, Bescheidenheit und zartes Ehrgefühl, ernste und consequent gehandhabte Disciplin.

Zuletzt sprach Herr Professor *Krämer*, Director der Realschule, in einer Deutschen Rede über das Thema: Worauf gründen sich unsre schönen Hoffnungen, mit denen die neuen Denkmäler der Vaterlandsliebe die Lehrer und alle Freunde der ächten Humanitäts-Bildung umgeben, und worin sollen sie ihre Bürgschaft finden? An diese Untersuchung knüpfte der Redner väterliche und ernstliche Ermahnungen für die Schüler.

Die ganze Feierlichkeit beschloss wie am ersten Festtage der zweite Theil der trefflichen Cantate.

Noch ist in Bezug auf die beschriebenen Schulfestlichkeiten zu erwähnen, dass zum Andenken an die merkwürdige Einweihung der neuen Schulgebäude auf dem Domsplatze auf Staatskosten eine schöne Denkmünze in Gold, Silber und Bronze geprägt wurde und zwar in der Grösse eines sogenannten ganzen Portugal-lösers. Sie war unter Leitung des berühmten Graveur *Loos* von dem durch viele treffliche Arbeiten in diesem Fache bewährten Künstler *Pfeuffer* angefertigt worden. Auf der Vorderseite erblickt man die neuen Gebäude mit der Umschrift: *Litterarum studiis S. P. Q. Hamburgensis*. Unten steht die Jahreszahl *MDCCCXL*. Die Rückseite stellt eine sitzende Matrone in antikem Gewande mit einer Mauerkrone auf dem Haupte dar. In der rechten ausgestreckten Hand trägt sie eine Erdkugel; in der Linken, welche an der Brust ruht, hält sie eine Schriftrolle. Zur rechten Seite sieht man Hamburgs Thürme, zur Linken am Boden liegend die altrömischen Fasces. Die Figur ruht auf einem in antiker Form dargestellten Schiffe. Nur die obersten Behörden, der Weiberedner und der Festdichter erhielten die goldene Medaille, die Lehrer die silberne und die Schüler die bronzene Denkmünze.

Am Schlusse unserer einfachen, anspruchlosen Beschreibung der erhebenden und schönen Feierlichkeit, mit welcher die neuen Gebäude eingeweiht wurden, kann der Berichterstatter nicht umhin, nochmals mit gebührendem Danke der seltenen Liberalität des Staates, des edeln Eifers der den Bau leitenden obern Behörden und namentlich der unermüdlichen Thätigkeit unsers hochverehrten Protoscholarchen, des Herrn Senators *Pehmöller*, in diesen Annalen des Johanneums zu erwähnen, wodurch den höhern Bildungsanstalten so freundliche Räume eröffnet wurden, die nun eine der schönsten Zierden unserer Stadt bilden und ein ehrenvolles Zeug-niss von dem Gemeinsinn der Hamburgischen Bürgerschaft geben. Möge Gottes Segen auf diesen neuen Pflanzstätten der Tugend und der Wissenschaft ruhen, und Gottes Geist alle die leiten und regieren, welche berufen sind, dem grossen Werke der Jugendbildung und der Erforschung und Förderung der Wahrheit ihre Kräfte zu widmen!

Am 11. Mai wurde in den drei Bildungsanstalten die neue Lehrthätigkeit begonnen, wozu uns der Herr Protoscholarch *Pehmöller* noch seine besonderen Wünsche vor dem Anfange der Lectionen darbrachte. Möge er sich noch lange

des glücklichen Gedeihens der Schulen erfreuen und darin den schönsten Lohn für seine edeln und beharrlichen Bestrebungen, denselben zu nützen, finden.

2. Lehrer-Collegium.

Im Laufe des verwichenen Schuljahrs schied aus dem Lehrer-Verein der seit Ostern 1828 angestellte Gesanglehrer, Herr *Johann Jacob Behrens*. Die obere Schulbehörde erkannte ihm in Betracht der seit zwölf Jahren geleisteten Dienste eine anständige Pension zu. Die erledigte Stelle wurde im October v. J. dem Herrn *Johann Friedrich Klapproth* übertragen. Derselbe hat seit Anfange dieses Jahres den Gesangunterricht übernommen und nicht nur mit regem Eifer und Geschicklichkeit, sondern auch mit recht glücklichem Erfolge besorgt. Wir dürfen daher hoffen, dass dieser für die allgemeine Bildung höchst schätzbare Unterrichts-Gegenstand unter der Leitung des Herrn *Klapproth* immer fröhlicher gedeihen werde.

3. Klassenbestand.

Prima	zählte nach Ostern 1840	27 Schüler.
Secunda		28 —
Tertia		29 —
Quarta		20 —
Quinta		9 —
Sexta		7 —

zusammen 120 Schüler.

Prima	zählte nach Michaelis 1840	24 Schüler.
Secunda		28 —
Tertia		29 —
Quarta		19 —
Quinta		10 —
Sexta		12 —

zusammen 122 Schüler.

Merkwürdig ist es, dass sich die Zahl der Schüler in dem letzt verflossenen Schuljahre in Vergleich mit der des vorigen Jahres sehr wenig veränderte. Wenn in früheren Jahren die Klassen der Gelehrten-Schule zahlreicher besucht waren, so muss man wohl bedenken, dass die Ueberfüllung in allen Gelehrten - Fächern eine gewisse Scheu vor dem Studiren hervorgebracht hat, die nothwendig auf die Frequenz in den Gymnasien einwirkt. Diese Verminderung der Studirenden möchte aber eher erfreulich als beklagenswerth zu nennen sein.

4. *Angabe der Schüler, welche im letzt verflossenen Jahre abgegangen sind.*

a. Aus *Prima* zu Michaelis:

Jacob Gläser, aus Erlangen, 18 Jahr alt, 2 Jahr Primaner, wird Medicin und Chirurgie in Erlangen studiren.

Herman Lauenstein, aus Hamburg, 18 $\frac{3}{4}$ Jahr alt, 1 $\frac{1}{2}$ Jahr Primaner, gedenkt Jura zu studiren, besuchte aber vorher noch das akademische Gymnasium.

Marcus Maass, aus Hamburg, 19 $\frac{1}{2}$ Jahr alt, 1 $\frac{1}{2}$ Jahr Primaner, entschloss sich Medicin zu studiren, ging aber ebenfalls zu dem akademischen Gymnasium über.

Friedrich Grote, aus Hamburg, 20 Jahr alt, 1 Jahr Primaner, hatte sich dasselbe Studium gewählt und bezog die Universität Heidelberg.

b. Aus *Secunda* vor Michaelis:

Marcus Piza, aus Altona, gab seine Studien bei uns auf und wählte einen andern Beruf.

Gottlieb Preuss, aus Altona, musste wegen Augenschwäche zum zweiten Male unsere Schule verlassen.

c. Aus *Tertia*:

Christian Dirks, aus Hamburg, wollte sich durch Privat-Unterricht fortbilden lassen.

Sisinnio de Pretis, aus Hamburg, konnte, weil er einer Disciplinar-Verfügung des Lehrer-Collegiums nicht Folge leisten wollte, unsere Schule nicht länger besuchen.

Nach Michaelis:

Adolf Puttfarken, aus Hamburg, wollte das Drogueriegeschäft erlernen.

Egmont Müller, aus Hamburg, wollte sich auf einem Comptoir zum Kaufmann ausbilden.

d. Aus *Quarta* vor Michaelis:

Gustav Garben, aus Hamburg, ging zur Real-Schule über.

Alexander Byng, aus England, trat in das technische Lehrinstitut des Herrn *Lohse* ein.

Adolf Osenbrüg, aus Hamburg, wählte das Baufach zu seinem künftigen Studium.

e. Aus *Quinta* nach Ostern:

Friedrich Wüppermann, aus Hamburg, ging wegen Kränklichkeit in ein benachbartes Institut auf dem Lande.

Ferner werden nach Ostern abgehen:

1) Nach bestandener Maturitäts-Prüfung:

Karl Johann Jahn, aus Hamburg, 18½ Jahr alt, 2 Jahr Primaner, wird Theologie studiren, vorher aber noch das akademische Gymnasium besuchen.

Octavio Schröder, aus Hamburg, 18½ Jahr alt, 2 Jahr Primaner, gedenkt in Heidelberg Jura zu studiren.

Emil Ferdinand Buek, aus Hamburg, 20 Jahr alt, 2 Jahr Primaner, hat sich entschlossen, in Berlin Jurisprudenz zu studiren.

Heinrich Emil Westphal, aus Hamburg, 19½ Jahr alt, 2 Jahr Primaner, hat sich das Studium der Medicin gewählt, geht zunächst auf das akademische Gymnasium.

Johann Wilhelm Rautenberg, aus Hamburg, 19 Jahr alt, 2 Jahr Primaner, wird dasselbe Studium betreiben und gleichfalls das akademische Gymnasium besuchen.

Meyer Lewig, aus Hamburg, 20 Jahr alt, 2 Jahr Primaner, hat sich für dasselbe Studium bestimmt und wird die Universität Leipzig beziehen.

Heinrich Adolf Reinecke, aus Hamburg, 19 Jahr alt, 2 Jahr Primaner, wird sich der Jurisprudenz widmen und geht auf die Universität Göttingen.

Wilhelm Paschen, aus Hamburg, 21 Jahr alt, 2 Jahr Primaner, will Medicin studiren, gedenkt aber zuvor noch propädeutische Studien auf dem hiesigen Gymnasium zu machen.

2) Ohne Maturitäts-Zeugniß:

Hermann Libert Westphalen, aus Hamburg, 19 Jahr alt, 2 Jahr Primaner, hat zu seinem Hauptstudium die Mathematik gewählt und wird die Universität Marburg beziehen.

Guido Eduard Noodt, aus Hamburg, 21 Jahr alt, 2 Jahr Primaner, will in Kiel Theologie und Philologie studiren.

3) Ohne das vorschriftsmässige Maturitäts-Examen:

Sigismund Lewis, aus Hamburg, 21 Jahr alt, 1½ Jahr Primaner, wird ebenfalls Medicin studiren, jedoch zunächst noch das akademische Gymnasium besuchen.

Ferner werden abgehen:

Aus *Tertia*:

Alfred Mauke, aus Hamburg, will die Buchhandlung erlernen.

Wilhelm Liepermann, aus Hamburg, hat sich über die Wahl seines künftigen Berufes noch nicht bestimmt erklärt.

Nathan Heine, aus Hamburg, wird sich nach seinem Abgange von der Schule dem Handelsfache widmen.

Aus *Quarta*:

Theodor Milberg, aus Hamburg, gedenkt sich nach seinem Abgange zum Ingenieur zu bilden.

Alfred Méliss, aus Hamburg, hat sich für das Handelsfach bestimmt.

Hermann Timm, aus Hamburg, wird in eine Papierhandlung eintreten.

Aus *Quinta*:

Jacob Lion, aus Hamburg, will Kaufmann werden.

5. Neu aufgenommene Schüler.

Im Laufe des letzt verwichenen Schuljahres wurden in die sechs Klassen der Gelehrten-Schule 40 neue Schüler aufgenommen. Von diesen traten ein in Prima 1, in Secunda 8, in Tertia 8, in Quarta 7, in Quinta 3, in Sexta 13; im Ganzen 16 mehr als im vorhergehenden Schuljahre.

6. Ankündigung der öffentlichen Osterprüfung.

Dinstag.

Prima.

von 9¼ bis 10¼ Uhr Tacitus Prof. Calmberg.

„ 10¼ — 11 „ Aristophanes Prof. Ullrich.

„ 11 — 11¼ „ Pause.

Secunda.

von 11 $\frac{1}{4}$ — 12 $\frac{1}{4}$ „ Terentius Prof. *Müller*.
„ 12 $\frac{1}{4}$ — 1 „ Französisch Lector *Tassart*.

Mittwoch.

Tertia.

von 9 $\frac{1}{4}$ bis 9 $\frac{3}{4}$ Uhr Hom. Odyssea Prof. *Calmberg*.
„ 9 $\frac{3}{4}$ — 10 $\frac{1}{4}$ „ Geschichte Coll. Dr. *Laurent*.

Quarta.

„ 10 $\frac{1}{4}$ — 10 $\frac{3}{4}$ „ Cornel. Nepos Coll. Dr. *Laurent*.
„ 10 $\frac{3}{4}$ — 11 $\frac{1}{4}$ „ Mathematik Prof. *Bubendey*.

Quinta.

„ 11 $\frac{1}{4}$ — 11 $\frac{3}{4}$ „ Biblische Geschichte Prof. *Hinrichs*.
„ 11 $\frac{3}{4}$ — 12 $\frac{1}{4}$ „ Griechisch Coll. Dr. *Meyer*.

Sexta.

„ 12 $\frac{1}{4}$ — 12 $\frac{3}{4}$ „ Lateinisch Coll. Dr. *Fischer*.
„ 12 $\frac{3}{4}$ — 1 „ Rechnen *Möller*.

An die öffentliche Prüfung der sechs Klassen unserer Schule werden sich den darauf folgenden Tag, den 22. April, 10 Uhr des Morgens, die feierlichen Redeübungen in der Aula des Johanneums anschliessen. Dabei gedenken drei abgehende Primaner mit eignen Arbeiten aufzutreten, die übrigen Declamanten aber werden memorirte poetische Stücke vortragen.

Octavio Schröder wird in Lateinischer Rede des Cajus Julius Cäsar Grösse und Verdienste um den Römischen Staat zu zeigen sich bemühen.

Karl Jahn gedenkt in Deutscher Rede zu zeigen: Durch welche Mittel und auf welchem Wege kam die Regeneration des Katholicismus im 16. Jahrhundert zu Stande?

Emil Buek wird in einem längern Deutschen Gedichte die vier Jahreszeiten besingen.

Der Abiturient *Jahn*, als bisheriger Primus seiner Klasse, wird am Schlusse der Redeübungen im Namen seiner aus der Schule scheidenden Commilitonen von der Schule und ihren Lehrern feierlich Abschied nehmen.

Zuletzt wird der unterzeichnete Director den abgehenden Primanern nach einer an sie gerichteten Rede die Schulzeugnisse einhändigen und sie aus der Anstalt entlassen.

Zu beiden Schulfeierlichkeiten ladet der Verfasser der Schulnachrichten die hochgeehrten Obern unserer Stadt und Schule, so wie noch besonders die Eltern unserer Schüler und alle Freunde des Hamburgischen Schulwesens hiermit ergebenst ein!

7. Aufnahme neuer Schüler.

Zur Prüfung und Aufnahme der neuen Schüler, welche mit dem Anfange des nächsten Schulcursus einzutreten wünschen, hat der Unterzeichnete Freitag, den 16. April, bestimmt. Wir ersuchen diejenigen Eltern, welche ihre Söhne der Gelehrten-Schule übergeben wollen, dieselben um 11 Uhr des Morgens an dem genannten Tage dem Director in seiner Amtswohnung in der Domstrasse No. 3. zuzuführen.

8. Anfang des neuen Lehrcursus.

Die Lehrstunden für das neue Schuljahr beginnen den 26. April früh 8 Uhr. An diesem Tage mögen die neuen Schüler sowohl als die älteren sich pünktlich einfinden. Die erste Stunde ist der Verlesung und mündlichen Erläuterung der Disciplinargesetze bestimmt.

Dr. Kraft.

U e b e r s i c h t

der statistischen Verhältnisse der Gelehrten-Schule des Hamburgischen Johanneums
im Schuljahre von Ostern 1840 bis Ostern 1841.

Lehrer-Collegium.	Allgemeiner Lehrplan.							V e r h ä l t n i s s e d e r									
	F ä c h e r.	Klassen und Stunden						S c h ü l e r.				Abiturienten.					
		I	II	III	IV	V	VI	Summa	In	waren nach Ostern 1840	nach Michaelis desselben Jahres	Gingen zum akademischen Studium über	Studiren				
													wo?	was?			
Director Dr. Theol. Kraft, Ordinarius von Prima.	Latein.	9	11	11	10	6	4	51	I	27	24	Ostern	16	in Heidel- berg	2	Theologie	4
Professor Dr. Theol. Müller, Ordinarius von Secunda.	Griechisch.	7	7	6	5	4	—	29	II	28	28	Michaelis	4			Geschichte	1
Professor Calmberg, Lct. Theol. Ordinarius von Tertia.	Hebräisch.	2	4	—	—	—	—	6	III	29	29			in Berlin	2	Jurisprud.	6
Professor Dr. Ullrich, Ordinarius von Quarta.	Deutsch.	3	3	3	3	3	4	19	IV	20	19			in Leipzig	1	Medizin	9
Professor Dr. Hinrichs, Ordinarius von Quinta.	Französisch.	2	3	3	3	4	3	18	V	9	10					Summa	20
	Englisch.	2	2	2	—	—	—	6	VI	7	12			in Peters- burg	1		
Professor Bubendey, Lehrer der Mathematik.	Religion.	2	2	2	3	3	2	14					20	in Kiel	1		
Collaborator Dr. Meyer.	Mathematik.	3	3	4	4	4	4	22						in Er- langen	1		
Collaborator Dr. Laurent.	Geographie.	—	—	1	2	2	2	7						auf dem Ham- burg. akade- mischen Gym- nasium	12		
Collaborator Dr. Fischer.	Geschichte.	2	3	2	2	2	*2	13									
Lector der Franz. Sprache Tassart.	Naturbe- schreibung.	—	—	—	—	2	*2	4									
Lector der Franz. Sprache Gallois.	Alte Literat.- Geschichte	2	—	—	—	—	—	2									
Lector der Engl. Sprache Glover.	Zeichnen.	*2	*2	2	2	2	—	10									
Zeichnenlehrer Hardorff.	Schönschrei- ben.	—	—	—	2	2	*3	7									
Schreiblehrer Elten.	Gesang.	—	—	2	2	2	2	8									
Rechnenlehrer Möller.	Summa	36	40	38	38	36	28	216									
Gesanglehrer Klapproth.																	

Anmerk. Die mit * bezeichneten Stunden sind combinirte Lectionen.

Kraft, Friedrich Karl,

Zu der öffentlichen Prüfung der sechs Klassen der Gelehrten-Schule am 20.
u. 21. April ladet ... ein Frid. Car. Kraft Nebst Schulnachrichten

Hamburg 1841

4 Diss. 3854,3

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10976427-6